

ex 1

Le jeu est équitable si $E(X) = 0$

Si $E(X) < 0 \rightarrow$ on joue pas

Si $E(X) > 0 \rightarrow$ on joue

Si $E(X) = 0$, on n'est ni gagnant, ni perdant

$E(X) = \sum (\text{gains nets} \times \text{proba associées})$

$$P(X=20) = \frac{1}{36} \quad (1,1)$$

$$P(X=40) = \frac{3}{36} \quad (1,3) (2,2) (3,1)$$

$$P(X=60) = \frac{5}{36}$$

$$P(X=80) = \frac{5}{36}$$

$$P(X=100) = \frac{3}{36}$$

$$P(X=120) = \frac{1}{36} \quad (6,6)$$

$$P(X=30) = \frac{2}{36} \quad (2,1) (1,2)$$

$$P(X=50) = \frac{4}{36} \quad (1,4) (2,3) (3,2) (4,1)$$

$$P(X=70) = \frac{6}{36}$$

$$P(X=90) = \frac{4}{36}$$

$$P(X=110) = \frac{2}{36}$$

$$\begin{aligned}
 E(x) &= (20 - \alpha) \times \left(\frac{1}{36}\right) + (30 - \alpha) \times \left(\frac{2}{36}\right) + (40 - \alpha) \times \left(\frac{3}{36}\right) + (50 - \alpha) \times \\
 &\quad \left(\frac{4}{36}\right) + (60 - \alpha) \times \left(\frac{5}{36}\right) + (70 - \alpha) \times \left(\frac{6}{36}\right) + (80 - \alpha) \times \left(\frac{5}{36}\right) + (90 - \alpha) \times \\
 &\quad \left(\frac{4}{36}\right) + (100 - \alpha) \times \left(\frac{3}{36}\right) + (110 - \alpha) \times \left(\frac{2}{36}\right) + (120 - \alpha) \times \left(\frac{1}{36}\right) = 70
 \end{aligned}$$

On obtient $\alpha = 70$ euros

exercice 2

$$1) E(x) = \sum p_i x_i = 0 \times 0,10 + 1 \times 0,15 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,30 + 4 \times 0,15 + 5 \times 0,05 = 2,4$$

$$\begin{aligned}
 V(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 = \sum p_i x_i^2 - E(x)^2 \\
 &= (0^2 \times 0,10 + 1^2 \times 0,15 + 2^2 \times 0,25 + 3^2 \times 0,30 + 4^2 \times 0,15 + 5^2 \times 0,05) - 2,4^2 \\
 &= 7,5 - 2,4^2 \\
 &= 1,75
 \end{aligned}$$

2) Risque de rupture de stock

$$P(x > 2) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) = 0,30 + 0,15 + 0,05 = 0,50$$

3) On cherche $P(x \leq x_i) = 0,9$

$$\text{Par lecture du tableau, } P(x \leq 4) = 0,95$$

Avec 4 produits en stock, on est sûr à 95% de pouvoir servir ts les clients.

Ex 3 :

1) Le jeu consiste à cocher 7 cases parmi 49 et il n'y a pas de notion d'ordre.

$$\text{Nb total de proba est } C_{49}^7 = \frac{49!}{7! \cdot 42!} = \underline{85\,900\,584}$$

$$P(6B) = \frac{C_6^6 \times C_{43}^1}{C_{49}^7} = 0,000\,000\,5$$

$$P(5B \text{ et } C) = \frac{C_6^5 \times C_{42}^1 \times C_1^1}{C_{49}^7} = 0,000\,000\,29$$

$$P(5B) = \frac{C_6^5 \times C_{42}^2}{C_{49}^7} = 0,000\,0601$$

$$P(4B \text{ et } C) = \frac{C_6^4 \times C_{42}^2 \times C_1^1}{C_{49}^7} = 0,000\,15$$

$$P(4B) = \frac{C_6^4 \times C_{42}^3}{C_{49}^7} = 0,002$$

$$P(3B \text{ et } C) = \frac{C_6^3 \times C_{42}^3 \times C_1^1}{C_{49}^7} = 0,00267$$

$$P(3B) = \frac{C_6^3 \times C_{42}^4}{C_{49}^7} = 0,02606$$

$$\text{Proba (perdre)} = 1 - P(6B) - P(5B \text{ et } C) - P(5B) - P(4B \text{ et } C) - P(4B) - P(3B \text{ et } C) - P(3B)$$

$$\boxed{\text{Proba (perte)} = 0,969}$$

$$2) \text{ Gain net} = \text{gain} - 1,50 \text{ €}$$

Loi de X :

$$P(X = -1,50) = \frac{85\,241\,808}{85\,900\,584}$$

$$P(X = 2,50) = \frac{2\,238\,600}{85\,900\,584}$$

$$P(X = 6,50) = \frac{229\,600}{85\,900\,584}$$

$$P(X = 35,30) = \frac{172\,200}{85\,900\,584}$$

$$P(X = 72,10) = \frac{12\,915}{85\,900\,584}$$

$$P(X = 727,90) = \frac{5166}{85\,900\,584}$$

$$P(X = 10\,802,70) = \frac{252}{85\,900\,584}$$

$$P(X = 1428\,570,50) = \frac{43}{85\,900\,584}$$

$$\begin{aligned} \boxed{E(X)} &= \text{Proba (perte)} \times \text{perte} + \text{somme des probas (gagner)} \times \text{gains} \\ &= (-1,50 \times 0,969) + (2,50 \times 0,02606) + (6,50 \times 0,00269) + \\ &\quad (35,30 \times 0,002) + (72,10 \times 0,00015) + (727,90 \times 0,0000601) + (10\,802,70 \times \\ &\quad 0,0000029) + (1428\,570,50 \times 0,0000005) = \boxed{-0,4988} \end{aligned}$$

$$V(x) = \left[(-1,50^2 \times 0,969) + (2,50^2 \times 0,02606) + (6,50^2 \times 0,00267) + (35,30^2 \times 0,0002) + (72,10^2 \times 0,00015) + (127,90^2 \times 0,0000601) + (10\,802,70^2 \times 0,0000029) + (1\,428\,570,50^2 \times 0,0000005) \right] - (0,4988)^2 = \underline{1021\,967,49}$$

3) Laisse croire qu'on a une grande chance de gagner

4) Pour que le jeu soit équilibré, $E(X) = 0$

On cherche α tel que :

$$(-\alpha) \times 0,969 + (4 - \alpha) \times 0,02606 + (8 - \alpha) \times 0,00267 + (36,80 - \alpha) \times 0,0002 + (73,60 - \alpha) \times 0,00015 + (129,40 - \alpha) \times 0,0000601 + (10\,804,20 - \alpha) \times 0,0000029 + (1\,428\,572 - \alpha) \times 0,0000005 = 0$$

On obtient $\boxed{\alpha = 1}$