

Espace vectoriel et application linéaire

G : ens + loi sur G

$+$: applicat° de $G \times G \rightarrow G$ qui à $(x, y) \in G \times G$ associe le pt $x + y$

$(G, +)$ est un groupe si
 loi est associative
 existence él^t neutre et inverse $\Rightarrow$

Soit K un ens muni de deux lois $+$ et $*$

Def: $(A, +, *)$ est un anneau si,

$(A, +)$ groupe commutatif ayant pr él^t neutre un él^t noté 0 .

$*$ est une loi associative

La $\times$ est distributive à g et à dte sur l'addition

$$\text{Ainsi } a \times (b + c) = a \times b + a \times c \text{ et } (a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

$*$ admet un él^t neutre noté 1

On dit qu'un anneau est commutatif lorsque la loi $*$ est commutative.

Soit G un ens muni d'une loi $*$

On dit que $a \in G$ est un él absorbant pour G si

$$\forall x \in G : a \times x = x \times a = a$$

Dém : Soit $x \in A$

$$0 \times x = (0 + 0) \times x \text{ f iii}$$

$$0 \times x = 0 \times x + 0 \times x$$

$(A, +)$ est un groupe

il existe $-0 \times x$ que j'ajoute à l'égalité

$$0 \times x + (-0 \times x) = [0 \times x + 0 \times x] + (-0 \times x)$$

$$0 = 0 * x + [0 * x + (-0 + x)]$$

$$= 0 * x + 0$$

$$0 = 0 * x$$

et 0 est un elt absorbant.

Prop : soit A un anneau commutatif alors 0 est un elt absorbant.

Déf : $(K, +, *)$ est un corps (resp commutatif) si :

(i) $(K, +, *)$ est un anneau (resp com)

(ii) Tout $a \neq 0$ distincts de 0 admet un inverse par la loi $*$.

Ex : Soit $\mathbb{Z}$ l'ens des entiers naturels positifs et négatifs.
 $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

$(\mathbb{Z}, +, *)$ est un anneau commutatif.

1.2 Espaces vectoriels

Soit E un ens et $(K, +, *)$ un corps

Considérons que E est muni de deux lois :

une loi interne $\oplus : E \times E \rightarrow E$

$$(x, y) \mapsto x \oplus y$$

une loi externe $\cdot : K \times E \rightarrow E$

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

$$E = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Déf : E muni de ces 2 lois est un K -esp vect.

Rmq : les el de K sont art appelés les scalaires

Enfin ceci est implicite de cette déf ms on doit avoir la stabilité par la loi interne (ie $\forall (X, Y) \in E \times E : X \oplus Y \in E$)

Dém Prop 1 Soit $x \in E$

Prop 1) $\forall x \in E, 0_K \cdot x = 0_E$

$$\begin{aligned} 0_K \cdot x &= (0_K + 0_K) \cdot x \\ &= 0_K \cdot x \oplus 0_K \cdot x \\ 0_K \cdot x &= 0_E \end{aligned}$$

Dém Prop 2 $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E \oplus 0_E) \quad (2) \quad \forall \lambda \in K, \lambda \cdot 0_E = 0_E$

$$\begin{aligned} &= \lambda \cdot 0_E \oplus \lambda \cdot 0_E \\ \lambda \cdot 0_E &= 0_E \end{aligned}$$

3 $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, -(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x)$

$-(\lambda \cdot x)$ opposé de $\lambda \cdot x$ pour $\oplus$

$(-\lambda) \cdot x$ opposé de λ pour $+$ (addition du corps)

fois x .

$\lambda \cdot (-x)$ λ fois opposé de x pour $\oplus$

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda) \cdot x &= 0_E = \lambda \cdot x \oplus (-\lambda) \cdot x \\ \lambda \cdot [x \oplus (-x)] &= 0_E = \lambda \cdot x \oplus [\lambda \cdot (-x)] \end{aligned}$$

4 : $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow [\lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E]$

Preuve : $\leftarrow$ Soit $\lambda = 0_K$

$$\lambda \cdot x = 0_K \cdot x = 0_E \quad \text{d'1 i}$$

$$\text{Soit } x = 0_E \quad \lambda \cdot x = \lambda \cdot 0_E = 0_E \quad \text{d'ii}$$

$\Rightarrow$ implique

$$A \Rightarrow B \text{ ou } C$$

$$A \text{ ET (Non B)} \Rightarrow C$$

On suppose $\lambda \cdot X = 0_E$ et $\lambda \neq 0_K$
 $\exists \lambda^{-1}$ tq $\lambda^{-1} \cdot \lambda = 1$
 $\lambda X = 0_E \Rightarrow \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot X) = \lambda^{-1} 0_E = 0_E$
 $(\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot X = 0_E$
 $1 \cdot X = 0_E$
 $X = 0_E$ (cf 8)

Ex :

a) $\mathbb{R}^n$ avec les prop. usuelles d'addition de vecteurs et de multiplication par un scalaire

Ainsi $\mathbb{R}^3$ muni de 2 lois suivantes :

1) $(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$

Sous espace vectoriel : sous-espace.

$$F \subseteq E$$

(i) F est un s.e.v

(ii) $\forall (X, Y) \in F \times F, \forall \lambda \in K : X+Y \in F$ et $\lambda X \in F$

(iii) $\forall (X, Y) \in F \times F, \forall (\lambda, \mu) \in K \times K : \lambda X + \mu Y \in F$

Soit un plan ac un vecteur $(2, 1)$

Soit $F = \{\vec{0}\}$

Ss ev de $\mathbb{R}^2$	Dim
$F = \{\vec{0}\}$	0
dtes passant par l'origine	1

Ss ev de $\mathbb{R}^3$	Dim
$\vec{0}$	0
dtes passant / origine	1
plan passant par P_0	2
espace entier	3

peut tomber
ou pas

Prop: Soit F_i une famille de sev alors $F = \bigcap_i F_i$ est aussi un sev.

Preuve:

Soit X et Y deux él de $F = \bigcap_i F_i$

Soit α et β (2 scalaires) $\in K^2$

$$\forall i \begin{matrix} X \in F_i \\ Y \in F_i \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{\alpha X + \beta Y}_{\text{combi li}} \in F_i$$

$$\Rightarrow \alpha X + \beta Y \in \bigcap_i F_i$$

donc F stable par combinaison linéaire et F est un sev.

2 Famille libre et liée de $\vec{v}$

Soit E un K espace vectoriel et $V_1, V_2, \dots, V_p$ des $\vec{v}$ de E .

Les p $\vec{v}$ sont linéairement dépendants s'il existe p scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ non tous nuls tq $\sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot V_i = \vec{0}$

Déf: p vecteurs de E sont dits linéairement indép. si $\sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot V_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$

donc on dit aussi que la famille de $\vec{v}$ est libre

Ex p 9

Ex.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ forment-ils une famille libre ou liée?

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \\ 3\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -5\beta = 0 \\ -3\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

la famille est libre

Famille liée :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \beta = \beta \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2\beta \\ \beta \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sol est une droite dirigée par } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

infinité de solution.

la famille est liée
(linéairement dépendante).

Famille génératrice ssi ts $\vec{v}$ de E peut s'écrire :
comme combi linéaire de ces $\vec{v}$:

$\forall x \in E : \exists \alpha_1 \dots \alpha_p$ tq $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot v_i$
 $\sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot v_i$ est appelé une décomposition de x .

Rmq : Si $p \vec{v}$ engendrent E , alors la famille de
vecteurs composé de ces $p \vec{v}$ + n'importe quel
 $\vec{v}$ engendre aussi E .

Ex₁: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-ils une famille génératrice?

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \end{cases} \quad L_2 - 2L_1 \quad \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ -\beta = y - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = y - x \\ \beta = 2x - y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y - x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (2x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La famille est génératrice.

Ex₂ = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ génératrice?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 2\alpha + 4\beta = y \end{cases} \quad L_2 - 2L_1 \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 0\alpha + 0\beta = y - 2x \end{cases}$$

pas générateur de $\mathbb{R}^2$ tout entier
(la famille ne génère que la sse $y - 2x = 0$)

Base

= fam libre et gén.

Dém (i) La famille $v_1, v_2, \dots, v_p$ est une base

(ii) Tout vecteur se décompose de manière unique sur $v_1, v_2, \dots, v_p$

p. 10

(ii) $\Rightarrow$ (i)

* la famille est génératrice par définition

$$* \sum_{i=1}^p \alpha_i V_i = \vec{0} = \sum_{i=1}^p 0 V_i$$

par unicité $\alpha_i = 0 \quad \forall i$
 $\Rightarrow$

donc $V_1, \dots, V_p$ base.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

comme $V_1, \dots, V_p$ génératrice

$$\exists \alpha_i \text{ tq } X = \sum_{i=1}^p \alpha_i V_i$$

$$\text{Supposons } \exists \beta_i \text{ tq } X = \sum_{i=1}^p \beta_i V_i$$
$$\text{donc } \sum_{i=1}^p \alpha_i V_i = \sum_{i=1}^p \beta_i V_i$$

$$\sum_{i=1}^p (\alpha_i - \beta_i) V_i = \vec{0}$$

$$\text{or } V_1, \dots, V_p \text{ libre } \Rightarrow \forall i \quad \alpha_i - \beta_i = 0$$
$$\text{d'où } \forall i \quad \beta_i = \alpha_i$$

donc la décomposition est unique

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(X) = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 = 0$$

Une base de polynôme de degré au plus 3
 $(1, X, X^2, X^3)$

Si on multiplie chaque X
on a X^3 au maximum.

2-3 Rang d'une famille de vecteurs.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} L_2 - L_1 & \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ L_3 - L_1 & \beta + 2\gamma = 0 \\ & -\gamma = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille est libre Rang = 3

peut
tomber
au paf

appli li : chacune des composantes de l'im
doit être une combi li des coordonnées de l'antécédent
chacune des coordonnées doit être de type $\alpha X + \beta Y$

appli li :ssi :

- (i) $\forall (X, Y) \in E^2 : u(X+Y) = u(X) + u(Y)$
 (ii) $\forall (\alpha, X) \in K \times E : u(\alpha X) = \alpha \cdot u(X)$

Im d'une combi li est une combi li des images

$\Rightarrow$ Soient α et $\beta \in K^2$

$$\begin{matrix} X' & Y' \\ (X, Y) \end{matrix} \in E^2$$

$$\begin{aligned} u(\alpha X + \beta Y) &= u(\alpha X) + u(\beta Y) \quad \text{d'après (i)} \\ &= \alpha u(X) + \beta u(Y) \quad \text{d'après (ii)} \end{aligned}$$

← Montrons (i)

Si $\alpha = \beta = 1$, on a directement

$$u(1X + 1Y) = 1u(X) + 1u(Y)$$

$$u(X + Y) = u(X) + u(Y)$$

Montrons (ii)

En posant $\beta = 0$ on a

$$u(\alpha X + 0Y) = \alpha u(X) + 0u(Y)$$

$$u(\alpha X) = \alpha u(X)$$

cond nécessaire pr que u soit linéaire et que

$$u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$$

$$\text{ex } u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ pas linéaire.}$$

P12

Ex: Ma l'im des p $\vec{v}$ linéairement dép de E par une applicatⁿ linéaire constitue une famille de p $\vec{v}$ linéairement dépendants de F .

Soient $V_1 \dots V_p$ liés dans E ,

u linéaire de E ds F

Par def, je sais qu'il existe des α_i non tous nuls tq $\sum_{i=1}^p \alpha_i V_i = \vec{0}_E$

$$u\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i V_i\right) = u(\vec{0}_E)$$

Par linéarité:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \alpha_i u(V_i) = \vec{0}_F$$

Donc $u(V_1) \dots u(V_p)$ est liée dans F .

On a aussi démontré que si u linéaire
 $u(v_1) \dots u(v_p)$ libre
 $\Rightarrow v_1 \dots v_p$ libre.

3.1 Image et rang d'une application linéaire

Montrons (ii).

En posant $\beta = 0$ on a $u(\alpha X + 0Y) = \alpha u(X) + 0u(Y)$
 $u(\alpha X) = \alpha u(X)$
 Soient $(X, Y) \in (\text{Im } u)^2$

Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$

$X \in \text{Im } u \Rightarrow \exists x \in E \quad u(x) = X$
 $Y \in \text{Im } u \quad \exists y \in E \quad u(y) = Y$

p 12

Calcul du rang de l'appli li :

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x \end{pmatrix}$$

$$u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rang } u = \text{Rang} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = 2$$

Prop u est $\left(\begin{array}{l} \text{surjective} \text{ si} \\ \text{ou - 1 ant} \end{array} \right) \text{ Rg}(u) = \dim F$

et combiné de $\vec{0} \Rightarrow$ ssev.

combiné

appliqué

Noyau : $\text{Ker } u = \{X \in E \mid u(X) = \vec{0}\}$
Ker u est un ssev de E .

P13 Preuve :

Soient $(X, Y) \in \text{Ker } u$
 $(\alpha, \beta) \in K^2$

$$u(\alpha X + \beta Y) = \alpha u(X) + \beta u(Y) \\ = \alpha \vec{0}_F + \beta \vec{0}_F = \vec{0}_F$$

Conclusion : $\alpha X + \beta Y \in \text{Ker } u$
 $\Rightarrow \text{Ker } u$ est un ssev.
car $\text{Ker } u$ est une combinaison

Prop : u est injective si $\text{Ker } u = \{\vec{0}\}$

p13 Preuve

u injectif si $\forall (X, Y) \in E^2$
 $u(X) = u(Y) \Rightarrow X = Y$

$\Rightarrow$ Soit $X \in \text{Ker } u$
 $u(X) = \vec{0}_F = u(\vec{0}_E)$
Par injectivité $\Rightarrow X = \vec{0}_E$

Conclusion $\text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}$

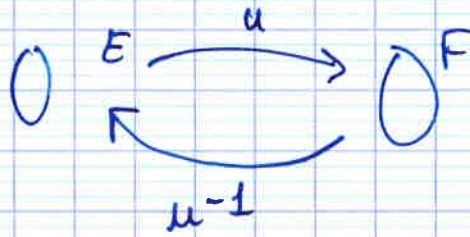
$\Leftarrow$ Soient $(X, Y) \in E^2$ tq $u(X) = u(Y)$
 $u(X) - u(Y) = \vec{0}_F$

$$u(X - Y) = \vec{0}_F$$

$X - Y \in \text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}$ car $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

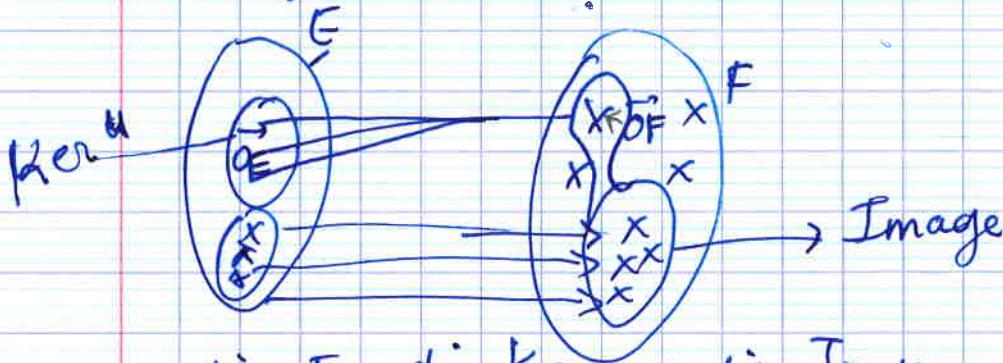
donc $X - Y = \vec{0}_E \Rightarrow X = Y$ donc injective

P13 Mg si u est une applicatⁿ linéaire bijective
 alors u^{-1} est une applicatⁿ linéaire.



$$u^{-1}(\alpha X + \beta Y) \\ (X, Y) \in F^2$$

$$\text{Rang}(u) = \dim(E) - \dim(\text{Ker } u)$$



$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u \\ = \dim \text{Ker } u + \text{Rang } u$$

P14 Ex 4 Mg si u est injective et si G est un système libre de E alors $u(G)$ est un système libre de F

Soit u injective

$v_1 \dots v_p$ famille libre

$u(v_1) \dots u(v_p)$ libre?

Soit α_i tq $\sum_{i=1}^p \alpha_i u(v_i) = \vec{0}$

par
linéarité

$$u\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i v_i\right) = \vec{0}_F$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i v_i \in \text{Ker } u = \{\vec{0}\} \text{ car } u \text{ injectif.}$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i v_i = \vec{0}_E \Rightarrow v_i \alpha_i = 0$$

donc $u(v_1) \dots u(v_p)$ libre

Chap 2 Les matrices

I Opérat° sur les matrices

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x \end{pmatrix}$$

énoncé : $M = [u(1,0); u(0,1)]$ au lieu de calculer l'image dans la base canonique

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M = \left[u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^\beta$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^\beta$$

énoncé : $u(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ x \end{pmatrix}$

p. 16

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calculer la Matrice rep de u ac c° base de départ $\begin{pmatrix} 1, 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1, -1 \end{pmatrix}$ et base d'arrivée canonique

Calculer $u \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ par la méthode matricielle

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{\beta} \leftarrow \text{ds la base } \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha = 5 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 5/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$$

$$u \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = u \left(\begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{\beta} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{\beta} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 2 \times 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{vérification}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\vec{v} \text{ colonne de } \gamma}$

$$u(X) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice rep de } u}}{M} \times \underset{\substack{\swarrow \\ \vec{v} \text{ colonne}}}{(X)_{\beta}} \leftarrow \text{coordonnées de base } \beta$$

matrice rep de u

avec β cō base de départ et γ : base d'arrivée.
 $\hookrightarrow \vec{v}$ colonne.

1.2. Somme et différence de matrices

On pr déf la Σ et $\neq$ de M pr des M de $\hat{m}$ ordre m.p
 Ainsi si $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ alors $A+B = [c_{ij}]$
 où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

De $\hat{m}$ pr la soustraction

$$\text{ex: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

1.3. Produit d'une cste par une M .

1.4 Produit de M.

Soit A une M d'ordre $n.p$ alors le produit AB n'est défini que si nb de col de A = nb de lignes de B .

$$A = [a_{ij}] \quad B = [b_{ij}]$$

$$AB = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right]$$

$$\text{ex: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \\ -4 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Explicite au niveau des applicat^{ns} linéaires.

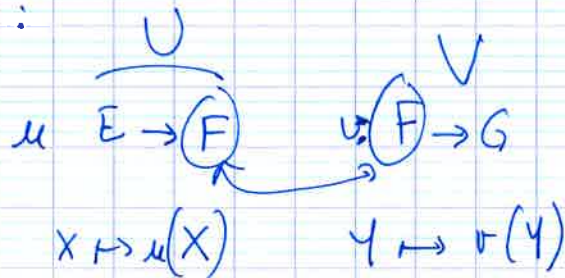
Soient $u: E \rightarrow F$ et $v: F \rightarrow G$

alors on pt def l'applic^{te} li $v \circ u: E \rightarrow G$.

en définissant pour $x \in E$: $(v \circ u)(x) = v(u(x))$

On peut alors vérifier que si U et V st les matrices rep de u et v , alors $v \circ u$ a pr M rep $V \cdot U$.

ex:



$v \circ u: E \rightarrow G$

$$x \mapsto v(u(x))$$

$$v(u(x)) = v(U \cdot x) = V[U \cdot x] = [V \cdot U] x$$

Rmq: • le Π des M est associatif.

$$A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

• le Π est distributif sur l'addition

$$A(B + C) = AB + AC$$

- le π des M n'est en revanche pas commutatif.
Ainsi $A.B \neq B.A$ p. A et B quelconque.
De +, le résultat n'est pas forcément de même taille.

2 Matrices particulières

- M carrée = nb ligne = nb colonne.
On dit que M est d'ordre n qd carré.



- M diagonale : Si ts les él en dehors de la diago nuls

$$M_{\text{diagonale}} = \begin{pmatrix} & & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{\text{sup}} :$

$$\begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{\text{triangulaire inf}} :$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

- Transposée de M .

$$M = [a_{ij}] \quad {}^tM = [a_{ji}]$$

On inverse les colonnes et les lignes

ex :

$${}^t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

je lis en ligne et écris en colonne.
(Si carrée : jeu de miroir mais + long)

- M carrée est symétrique si
 $M = {}^tM$.

$$\text{ex } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = M \quad {}^tM = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow {}^tM = M \Rightarrow M$ est symétrique.

matrice nulle et identité aussi
matrice diagonale aussi

$$M_{\text{identité}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

matrice ligne $[\quad]$

matrice colonne $\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$

- M idempotente : $\hat{m}$ puissance.
si $M \cdot M = M$

on retombe sur la $\hat{m}$ M si on fait des puissances
→ démontrat^o par récurrence.

ex :

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^2 = M \Rightarrow \text{idempotente}$$

$(2 \times 3) \cdot (3 \times 2)$

- M nilpotente : $M^n = [0] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$M^0 = I \leftarrow$ matrice identité.

Rmq calcul difficile pr M^{36} de calculer + vite
en faisant M^2 puis $(M^2)^2$ au lieu de calculer

⚠ $(M^4)^4 = M^8$

ex : $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ est elle nulle ?

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 & \downarrow & \\
 \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \uparrow & \\
 & M^2 &
 \end{array}$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow M \text{ est nilpotente}$$

$$\Delta : M^3 = M^2 \times M$$

dans cet ordre et non $M \times M^2$.

Déterminant :

notion de forme multilinéaire.

$$f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

(i) Ppe de multi li par rapport à chaque Δ able

$$\forall i \leq n,$$

$$f(x_1, \dots, \alpha x_i + \beta x'_i, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \beta f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)$$

Ppe d'alternance : $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Prop : une forme multi alt est nulle si $2 \vec{v}$ st égaux.

La valeur de $f(X_1 \dots X_n)$ est inchangée si on ajoute à l'une des Δ ables une combi li des autres Δ able

$$f(X_1, \dots, X_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j X_j, X_1 \dots X_n)$$

Par linéarité de la Δ able = $f(X_1 \dots X_i \dots X_n)$

$$+ \sum_{j \neq i} \alpha_j f(X_1 \dots \overset{\substack{\uparrow \\ \text{ième et jème} \\ \text{position}}}{X_j} \dots X_n)$$

$$= f(X_1 \dots X_i \dots X_n)$$

Calcul du déterminant $\rightarrow$ forme multilinéaire alternée particulière.

Si $\vec{v}$ liés $\rightarrow \det = 0$
famille de $\vec{v}$

Det d'une matrice simple :

$$\det M = \det(a) = |a| = a$$

$\nearrow$ pas la valeur absolue mais déterminant pour Matrice 1×1 .

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

ex : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5 \neq 0 \rightarrow$ famille de $\vec{v}$ libre

Pour les matrices 3×3 mais pas 4×4 $\triangle$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \text{on répète les } 2 \text{ } \rightarrow \text{ } 1^{\text{ère}} \text{ col. à la fin}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & e & f & g \\ g & h & i & j \end{pmatrix} \det = aei + bfg + cdh - gec + hfa + idb$$

ex $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det = 2 + 6 + 24 - (12 + 3 + 8) = 9.$$

Calcul général du det pour une M carrée.

On appelle mineur de a_{ij} , le terme $\Delta_{ij} = \det M_{ij}$
Où M_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la
i ème ligne et j ème colonne

On appelle cofacteur ..

Rmq: le cofacteur de a_{ij} , $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ car Δ_{ij} est
le mineur principal de a_{ij} .

ex: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ calculez Δ_{22} et A_{22}

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \Delta_{22} = -10$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{23} = 3 = -(-3) = +3$$

Dét :

$$\forall i : \det M = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \times \Delta_{ij}$$

$$\forall j : \det M = \sum_{i=1}^n a_{ij} \times A_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Delta_{ij}$$

$$\text{ex : } \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8 - 36 = -28$$

Il vaut mieux choisir une ligne ou colonne avec le + de zéros possible.

Dét du produit de matrice $(n \times n)$ est égal au produit des déterminants.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

fst^o que si M carrées d'origine.

Faire apparaître des zéros de la 1^{ère} colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 21 = 23$$

Rang d'une matrice.

Soit M une matrice (d'ordre $n \times m$)

Déf : On appelle matrice extraite d'ordre p une M carrée construite en sélectionnant p lignes et p colonnes de M et en ne gardant ainsi que les él sélectionnés.

ex $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

3 matrices extraites d'ordre 2

6 matrices extraites d'ordre 1

les entrées de la matrice.

rang d'une M (non nécessairement carrée) d'ordre n est la + gde matrice extraite de $\det$ non nul.

ex $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ex : $\det = 0$ Rang < 2 .

$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det |2| = 2 \neq 0$

Rang $= 1$.

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rg} = 2$.

Rg d'une fa de $v = \text{rg matr composé de } v \text{ de la famille}$

ex : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

p23 ex : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$
 $\uparrow \quad \uparrow$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$ donc rang = 2
 La famille est génératrice

Rg d'une appli L_i = dim de Im de f

p23 ex : $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$

Noyau : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } u$ ssi $\begin{cases} y - x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -L_1 \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Sigma \text{ triangulaire sup ac } z = 0$

$\begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Ker } u = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R} \right\}$

$\uparrow$ représente une droite dirigée par $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dim \text{Ker } u = 1$

* Th du Rang : $\dim \text{Ker } u + \text{Rang } u = \dim E$

$\text{Rang} = 3 - 1 = 2 = \text{Rang}$

Matrice associée à cette A.L :

On prend la base canonique pour la base de départ :

* $M = \left[u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrice extraite : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = 2$

⚠ Écrire en
colonne!

p24

pas = ité

$$\text{ex : } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 - L_1' \\ L_3 - 3L_1' \\ L_4 + L_1'}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -5 & 1/2 & -9/2 \\ 0 & 7 & 7/2 & 21/2 \end{pmatrix}$$

Etape 2: IP faut s'occuper de la ligne 2; pbm: il vaut zéro donc on intervertit les lignes

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \\ L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & -5 & 1/2 & -9/2 \\ 0 & 7 & 7/2 & 21/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} L_1 \\ L_4 \\ L_3 \\ L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 7 & 7/2 & 21/2 \\ 0 & -5 & 1/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

cette ligne se divise bien par 7 donc on l'a choisie

pour faire apparaître le 1 $\rightarrow 5L_2' + L_3$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2/7 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

⚠ pour les det : pas le droit d'intervertir les lignes

$$\begin{pmatrix} L_3/3 \\ L_4 + L_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang = 3

→ toujours dernière ligne nulle
Réduite de Gauss = M Δaire sup.

→ fonctionne aussi ac matrice rectangulaire

p24 II Inversion de matrice.

* M carrée $\det M \neq 0 \rightarrow \text{Rang } M = n = \dim F$
 $\hookrightarrow u$ surjective

$$\text{Rang } M = \dim E$$

$$\text{Th rang} \Rightarrow \dim \text{Ker } u = 0$$

$$\text{Ker } u = \{ \vec{0}_E \} = 0$$

$\Rightarrow u$ injective $\Rightarrow$ bijective

On peut définir $u^{-1}: F \rightarrow E$

$y \mapsto$ antécédent par u

* u bijective linéaire $\Rightarrow u^{-1}$ linéaire.

$$u^{-1}: F \rightarrow E$$

$$\text{Soient } (X, Y) \in F^2$$

$$(\alpha, \beta) \in K^2$$

$$u^{-1}(\alpha X + \beta Y) ?$$

Comme u bijective $\exists x \in E$ tq $X = u(x)$

$\exists y \in E$ tq $Y = u(y)$

$$u^{-1}(\alpha X + \beta Y) = u^{-1}(\alpha u(x) + \beta u(y))$$

$$= u^{-1}[u(\alpha x + \beta y)]$$

$$= \alpha x + \beta y$$

$$= \alpha u^{-1}(X) + \beta u^{-1}(Y)$$

$\Rightarrow$ donc u^{-1} linéaire

Soit N la matrice représentable de u^{-1}

$$\vec{u}(u(X)) = X = \vec{u}(MX) = (NM) \cdot X$$

$$\text{donc } N \cdot M = I$$

donc effectivement u^{-1} est représentée par M^{-1}

M^{-1} l'inverse pour la multiplication de la matrice représ. de u .

1) Méthode des cofacteurs.
= Matrice des cofacteurs.

ex: $M \times M^* = [a_{ij}] \times [A_{ji}] =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1} & \dots & A_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{jm} & \dots & A_{jn} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$

$$C_{ij} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}$$

On va dém que tout est nul en dehors de la diagonale principale

* Si $i=j$ $C_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \det M$ par définition

* Si $i \neq j$

on insère la ième ligne
à la place de la jème
le reste est inchangé

$$\begin{matrix} i \rightarrow \\ j \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0 = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn}$$

donc $C_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$M \cdot M^* = \begin{bmatrix} \det M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \det M \end{bmatrix} = \det M \times I$$

$$\left(M \times \frac{1}{\det M} \right)^t C_0(M) = I \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t C_0(M)$$

pare de l'autre côté

ex.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 - L_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

prendre la matrice initiale !

$$\det M = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{matrice inversible}$$

$$Co(M) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Co(M) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$tCo(M) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2} \times tCo(M) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

⚠ Lorsque on a un coeff :
 * devant un det : on pr l'intégrer ds 1 seule ligne ou colonne
 * devant une matrice : on multiplie chaque chiffre
 verif $M \times M^{-1} = I$
 et non $M^{-1} \times M$.

2) Méthode des pivots.

$$\text{ex: } \begin{pmatrix} 2x+2y \\ x+2y+2z \\ -2x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{u } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} X & Y & Z & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Cas particulier

$$\begin{array}{l} * \\ \text{embête} \end{array} \begin{array}{ccc|ccc} & 1 & 2 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 3 & 1 & & & \end{array}$$

donc intervenir toute la ligne

$$* \begin{array}{ccc|ccc} & 1 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \rightarrow \text{ veut dire que } M \text{ pas inversible}$$

p 26

2.3 Système d'éq linéaire

Si $b \notin \text{Image}$, il n'a pas d'antécédent donc il n'y aura aucune sol.

Si $b \in \text{Im}$: au - une solution

Si l'appli est injective : 1 seule sol. + noyau
n'est pas injective : infini de sol.
+ noyau

Soit X' une solution

$$AX' = b$$

Soit X'' un él du noyau

$$AX'' = (0)$$

$$A(X' + X'') = b$$

antécédent de b

Si l'applic est bijective : il faut que $n = p \rightarrow$ matrice carrée

Si $b = 0$ sous espace affine

p 27

Cramer :

rang = n si M carrée et $\det \neq 0$

$\rightarrow$ surjective

mais rang = m dim q'espace de départ

et selon th. du rang $\rightarrow M$ bijective $\rightarrow$ unique solution

$\rightarrow$ cherche par la bijection réciproque.

$$MX = b$$

Si M inversible

$$M^{-1}(MX) = M^{-1}b$$

$$\text{associativité} \rightarrow (M^{-1}M)X = M^{-1}b$$

$$IX = X = M^{-1}b$$

Cramer propose une autre solution

$$\text{ex: } \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y + z = 3 \\ -y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{en sommant } L_2 + L_3 \Rightarrow z = \frac{5}{3}$$

(donc ici pas vraiment besoin de Cramer)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (2 + 1) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{C'est un système de Cramer}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3-5) = -2$$

$$X = \frac{\Delta_x}{\det M} = \frac{-2}{6} = \boxed{-\frac{1}{3} = X}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(6-2) = 8 \quad Y = \frac{8}{6} = \boxed{\frac{4}{3} = Y}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2+3) = 10 \quad Z = \frac{10}{6} = \boxed{\frac{5}{3} = Z}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ en vérifie en réinjectant ds les équations.}$$

Méthode du pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow L_{1/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_3 + L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \times \frac{3}{2} \\ L_3 \times \frac{1}{3} \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 - \frac{3}{2}L_3 \\ L_2 - L_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 - \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array} \right] = \frac{3-5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

système sous déterminé : moins d'équat^o que d'inconnues
 → veut dire pas de sol

! attention à celles qui sont incompatibles

système sur déterminée : plus d'éq que d'inconnues

Mais $\Delta \begin{cases} x+y=2 \\ x=3 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \text{pas de solut}^o \text{ eq incompatibles}$

(car la 3^e eq peut être une combi li des 2 premières
 eq qui se répète donc se ramène à autant de sol
 que d'inconnues.

P 28

Diagonalisation

Calculer image d'image d'image.

→ on cherche une base particulière qui agit comme une homothétie.

idée : construire base particulière.

en fait de la base considérée on a des coordonnées fixes.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_A = \sum_{j=1}^n x_j A_j$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B = \sum_{i=1}^n y_i B_i$$

ex p 28

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{\alpha}{(x-y)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\beta}{y} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ faire un système $\begin{cases} \alpha + \beta = X \\ \beta = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = X - Y \\ \beta = Y \end{cases}$

Dans la base γ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X-Y \\ Y \end{pmatrix}_\gamma \quad \gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

⚠ sens de la flèche peu intuitif
 $P_{A \rightarrow B}$

$$X_A = P_{A \rightarrow B} Y_B$$

$$P_{A \rightarrow B} = \underbrace{(B_1 \dots B_n)}_{\text{dans la base A}} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_{\text{Base Canonique}} \xrightarrow{\text{Base}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ rien à calculer.
 qd base canonique au départ

Ex p 29 :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_{A \rightarrow B} = P_{B \rightarrow A}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

$$P_{B \rightarrow A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_A$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dans la base B : } P_{B \rightarrow A} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_A$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

$$\text{Vérif } \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_B = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

p30

Matrices équivalentes

A représente u avec β_A base de E
et γ_A base de F

B β_B base de E
et γ_B base de F

$$u(X) = A X_{\beta_A} = B X_{\beta_B}$$

$$u(X) = \underbrace{B X_{\beta_B}}_{\text{coordonnées de } \gamma_B}$$

$$= A X_{\beta_A}$$

$$= A \underbrace{P_{\beta_A \rightarrow \beta_B}}_{\text{coordonnées de } \gamma_A} X_{\beta_B}$$

$$= P_{\gamma_B \rightarrow \gamma_A} [A P_{\beta_A \rightarrow \beta_B} X_{\beta_B}]$$

$$= \underbrace{\left[\underbrace{P_{\gamma_B \rightarrow \gamma_A}}_Q \underbrace{A P_{\beta_A \rightarrow \beta_B}}_P \right]}_{\substack{\parallel \\ B}} X_{\beta_B}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

rang = 2

rang = 2

car matrice extraite $\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang} = 2$$

Les matrices sont donc équivalentes

Matrices diagonales :

(Si $\exists P$ tq $B = PAP^{-1}$ alors A et B semblables)

On suppose A représente μ avec la base β_A au départ et à l'arrivée.
 B " " " " " " " "

$$\mu(X) = \underbrace{AX_{\beta_A}}_{\text{coordonnées dans } \beta_A}$$

$$\mu(X) = \underbrace{BX_{\beta_B}}_{\hookrightarrow \beta_B}$$

$$\mu(X_{\beta_B}) = A \left(\underbrace{P_{\beta_A \rightarrow \beta_B} X_{\beta_B}}_{\text{dans } \beta_A} \right)$$

$$\mu(X) = \underbrace{\begin{pmatrix} P_{\beta_B \rightarrow \beta_A} & A \cdot P_{\beta_A \rightarrow \beta_B} \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ B}} \underbrace{X_{\beta_B}}_{\hookrightarrow \beta_B}$$

$$P = P_{\beta_B \rightarrow \beta_A} \quad P^{-1} = P_{\beta_A \rightarrow \beta_B}$$

Les matrices sont donc équivalentes

p31 Preuve

Soient $U \in E_\lambda$

$V \in E_\lambda$

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \mu(\alpha U + \beta V) &= \alpha \mu(U) + \beta \mu(V) \\ &= \alpha(\lambda U) + \beta(\lambda V) \\ &= \lambda(\alpha U + \beta V) \quad \text{donc } \alpha U + \beta V \in E_\lambda \end{aligned}$$

E_λ est un sev

Supposons $V \in E_\lambda$ et $V \in E_\mu$

$$\mu(V) = \lambda V \quad \mu(V) = \mu V$$

$$\lambda V = \mu V \Rightarrow (\lambda - \mu)V = \vec{0}$$

$$\text{or } V \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu$$

$$\mu(V) = \lambda V$$

μ est représenté par A

$$AV = \lambda V$$

$$AV - \lambda V = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I) \cdot V = \vec{0}$$

V est un vecteur propre ($\neq \vec{0}$)

$$\text{associé à } \lambda \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \quad x^2 = -1$$

$$x^2 = -1$$

Preuve p31 Si A diagonalisable $A = PDP^{-1}$

$$\det A = \det(PDP^{-1})$$

$$= \det P \times \det D \times \det P^{-1}$$

$$= \det P \det D \frac{1}{\det P}$$

$$= \det D$$

$$= \prod_{i=1}^n \lambda_i = \text{Trace}$$

Ex p32

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -x+2z \\ -2x+y+2z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$G+G_2+G_3$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1-\lambda & -\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda-1 & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda-1)(3-\lambda)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)(3-\lambda)$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 3$$

3 vp simple $\stackrel{n=3}{\implies}$ implique A diago

$$\text{Trace} = 1+0+2 = -1+1+3 = \sum \lambda_i \text{ ok}$$

$$\det = -3 = \prod \lambda_i \text{ ok}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$E_{\lambda_1} = -1$$



Reprendre la M d'origine et pas la matrice simplifiée pour trouver de l-

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ -x+y+2z \\ -2x+y+3z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x + y/2 - z/2 = 0 \\ 3y/2 + 3z/2 = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 0 \\ y + z = 0 \\ z = z \end{cases}$$

$$= z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x = z \\ y = -z \\ z = z \end{matrix}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$E_{\lambda_2} = 1$: Si je me trompe de valeur propre (ex: $\lambda_2 = -2$), j'obtiens un vecteur propre nul.

$$M - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ par substitution $\begin{cases} y = z \\ x = z \\ z = z \end{cases}$

$$E_{\lambda_2} = 1 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} \quad V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \\ -7y/2 + 5z/2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/7 z \\ y = 5/7 z \\ z = z \end{cases}$$

$$V_3 \begin{pmatrix} -1/7 \\ 5/7 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{on veut 1 ici}$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Méthode à utiliser.

* Pour les matrices 3×3 : $\begin{cases} \text{Comatrice} \\ \text{Pivot de Gauss} \end{cases}$

* Pour les $n \times n \rightarrow$ Pivot de Gauss

$$x \neq 0$$

$$0^x \rightarrow = 0$$

$$x = 0$$

$$0^0 \rightarrow = 1$$

Méthode de Gauss :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} L_1 - L_2' \\ L_2 \times \frac{1}{2} \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} L_1 - 3L_3' \\ L_2 + 2L_3' \\ -\frac{1}{8}L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \end{array} \right]$$

p 32

Puissance d'une matrice

Si A est diago, alors $A^k = P D^k P^{-1}$ ($k \in \mathbb{N}$)

→ Dém par récurrence.

$$k = 0 \rightarrow A^0 = I.$$

$$P \times D^0 \times P^{-1} = P \cdot I \cdot P^{-1} = P P^{-1} = I$$

OK

$$k = 1$$

Si A est diago

$$A^1 = A = P D P^{-1} \quad \text{OK}$$

$$k \rightsquigarrow k+1$$

$$A^k = P D^k P^{-1}$$

$$A^{k+1} = A \times A^k = P D P^{-1} \times P D^k P^{-1}$$

$$P D I D^k P^{-1} = P D^{k+1} P^{-1} \quad \text{QED}$$

Rmq : Si D diagonale, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^k = ?$$

je commence par diagonaliser

A est symétrique donc diagonalisable

$$* \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) \\ = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$$

Vérif : Trace : $\sum \lambda_i = 4$. $\frac{2+2}{\sum \text{diag}} = \frac{3+1}{\sum \lambda_i}$

$$\text{Det} = 4 - 1 = 3 = 3 \times 1 = \prod \lambda_i \quad \text{ok.}$$

$$E_{\lambda_1} = 1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=x \end{cases} \quad V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = 3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=y \end{cases} \quad V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $A^k = P D^k P^{-1}$

$$P^{-1} D^k P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} \frac{3^k-1}{2} & \frac{3^k-1}{2} \\ \frac{3^k+1}{2} & \frac{3^k+1}{2} \end{bmatrix}$$



Si on remplace k par 0 : on ne trouve pas la matrice identité
 $k=1 \rightarrow$ matrice de départ pour vérif.

chapitre 3

Fonction de plusieurs variables

Preuve p 35

Inégalité de C.S.

$$(XY)^2 \leq (XX)(YY) \quad \forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2$$

Dém : employer la bilinéarité

$$(\alpha X + \beta X') \cdot Y = \alpha(XY) + \beta(X'Y) \quad \text{Forme linéaire}$$

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

Forme symétrique

X et Y orthogonaux ssi $X \cdot Y = 0$

Preuve inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(X + tY)(X + tY) \geq 0$$

$$XX + X(tY) + tYX + t^2YY \geq 0$$

$$XX + 2tXY + t^2YY \geq 0$$

$$t=x \quad (YY)t^2 + 2t(XY) + (XX) \geq 0$$

$$\Delta = (2(XY))^2 - 4(YY)(XX)$$

$$= 4[(XY)^2 - (YY)(XX)]$$

Si $\Delta \leq 0 \Rightarrow (XY)^2 \leq (XX)(YY)$

$$(i) N(X) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{XX} = 0$$

$$\Leftrightarrow XX = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i, x_i = 0 \Leftrightarrow X = \vec{0}$$

Inégalité de C.S

$$(XY)^2 \leq X^2 \cdot Y^2$$

↑

$$XY \leq \sqrt{X^2 Y^2}$$

↑ Norme

Preuve (ii) $N(X+Y) = \sqrt{(X+Y)(X+Y)}$

$$(X+Y)(X+Y) = XX + 2XY + YY$$

Inégalité de C.S.

$$\leq XX + 2\sqrt{(XX)(YY)} + YY$$

$$\leq (\sqrt{XX})^2 + 2\sqrt{XX}\sqrt{YY} + (\sqrt{YY})^2$$

on reconnaît une identité remarquable

$$\rightarrow \leq (\sqrt{XX} + \sqrt{YY})^2$$

$$\sqrt{(X+Y)(X+Y)} \leq \sqrt{XX} + \sqrt{YY}$$

$$N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$$

Preuve (iii) $N(\lambda X) = \sqrt{(\lambda X)(\lambda X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2}$
 $= \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
 $= |\lambda| N(X)$

p. 36

Exercice :

Mo si N norme alors $d(X, Y) = N(X - Y)$ est une distance.

i) $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow N(X - Y) = 0$
 $\Leftrightarrow X - Y = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow X = Y$

(ii) $d(X, Y) = N(X - Y)$
 $= N(Y - X) = N(-(X - Y))$
 $= |-1| N(X - Y) = N(X - Y)$
 $= d(X, Y)$

(iii) Soient $(X, Y, Z) \in E^3$
 $d(X, Z) = N(X - Z)$
 $= N[(X - Y) + (Y - Z)]$
 $\leq N(X - Y) + N(Y - Z)$
 $\leq d(X, Y) + d(Y, Z)$

$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$

$d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

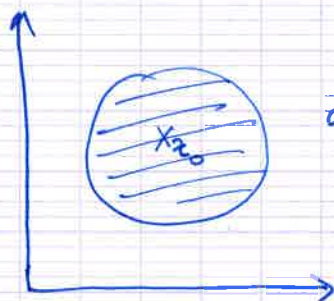
Boule = disque avec norme euclidienne

* B. fermée

Sur $\mathbb{R}$



Sur $\mathbb{R}^2$



disque fermé de centre x_0 et de rayon r .

Sur $\mathbb{R}^3$: boule

* ouverte intervalle ouvert centre sur x_0

Sur $\mathbb{R}$ facile

Sur $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ sans bord.

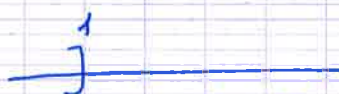
Sur $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ sans bord (abstrait : pas de réalité physique)

on ne peut pas enlever le bord et s'approcher à l' ∞ du bord
boules ouverte : Ω

$\mathbb{R}$

$$x \in]1; \infty[$$

$$r = \frac{x-1}{2}$$



$$B(x, r) \subset]1; +\infty[$$

donc $]1; +\infty[$ est ouvert

$\mathbb{R}^2$



$$\Omega = \{x > 0 \text{ et } y > 0\}$$

On calcule $r = \min \frac{(x, y)}{2}$ $B\left(\frac{(x, y)}{2}, r\right) \subset \Omega$

$\rightarrow \Omega$ est un ouvert

Un ens est fermé si son compl est un ouvert :

$[a, b]$ est fermé

Car son complément sur $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$
ouvert ouvert

p 38

Continuité

- o Si fct° du type: $g(x, y) = \begin{cases} x^2 y & \text{si } y \geq 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$
définie par morceau

$$g(x, 0) = 0$$

$$\text{or } \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y < 0}} g(x, y) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y < 0}} 2 = 2 \quad \text{donc la fct° n'est pas continue si } y = 0$$

Supposons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Si $b > 0$ sur un voisinage de (a, b)

$f(a, b) = x^2 y$ continue

Si $b < 0$

$f(x, y) = 0$ continue

Probl si $b = 0$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exp 38 *

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, 0) \\ y \geq 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, 0) \\ y \geq 0}} x^2 y = a^2 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, 0) \\ y < 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, 0) \\ y < 0}} 0 = 0$$

f continue en $(a, 0)$ donc f continue sur $\mathbb{R}^2$

1) Prenons $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k x^k h^{n-k} - x^n}{h}$$

Formule de Newton :

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k h^{n-k}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k h^{n-k}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k h^{n-k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k \left[\lim_{h \rightarrow 0} h^{n-k-1} \right]$$

0 sauf si $n-k-1=0$
 $k=n-1$

$$= \frac{C_n^{n-1} x^{n-1}}{n} = \boxed{nx^{n-1}}$$

• $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) \cdot u(x)}{h} (x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x)}{h} (v(x+h) - v(x))$$

$$= \boxed{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{v(x+h) - v(x)} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

On pose $H = v(x+h) - v(x)$

Par continuité si $h \rightarrow 0$ $H \rightarrow 0$

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{u(v(x)+H) - u(v(x))}{H} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$= u'(v(x)) \times v'(x)$$

Comme $(\frac{1}{X})' = -\frac{1}{X^2}$

et $[u(v(x))]' = v'(x) u'(v(x))$

$$\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x)) \times g'(x)}$$

p39

Dér d'une fct° de n variables

Gradient de $f(x, y)$

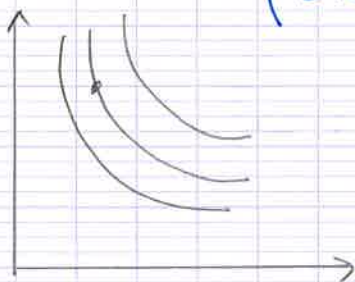
ex $f'_x(x, y) = ye^{xy} + 2x$

$f'_y(x, y) = xe^{xy}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} ye^{xy} + 2x \\ xe^{xy} \end{pmatrix}$$

p40 ex : $f(x, y) = 4x^2y^2 + 3xy^3 + 5x + 4$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 8xy^2 + 3y^3 \\ 8x^2y + 9xy^2 + 5 \end{pmatrix}$$



← B d'utilité de niveau

$$f(x, y) = c$$

$$u(x, y) = xy$$

$$\frac{dQ}{dk} = \frac{3}{4} 4 k^{-1/4} L^{-1/4} = 3k^{-1/4} L^{1/4}$$

$$\frac{dQ}{dk}(10\,000, 625) = 1,5$$

$$Q(10\,000, 625) = 4(10\,000)^{3/4} 625^{1/4} = 20\,000$$

Ex p 41
Jacobienne

$$f(x, y) = (x^2 + y, e^{xy})$$

$$J_f = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 0 & e^{xy} \end{bmatrix}$$

$$g(x, y, z) = (x^2y + e^z, xyz, 3x + y, 2xz)$$

$$J_g = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & e^z \\ yz & xz & xy \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dérivée de
chaque
composante
en fct de x
↓

* Dérivée partielle d'ordre > 1

$$\text{ex: } f(x, y) = x^3y^2 + 2y + 5$$

$$f'_x = 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2$$

$$f'_y = 2x^3y + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = 6x^2y$$

Matrice Hessienne

$$D^2_f = \begin{bmatrix} 6xy^2 & 6x^2y \\ 6x^2y & 2x^3 \end{bmatrix}$$

la M sera fs symétrique

p42 Ex:

$$D^2f = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \end{bmatrix}$$

p42 Si $f \in C^4$ alors $\frac{d^4 f}{dx dy dz dy} = \frac{d^4 f}{dy^2 dx dz}$.

* Df (différentielle) mesure la Δ° d'altitude de f (d'altitude) entre le pt d'arrivée et de départ

p43

Dérivation d'une composée

Exemple: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

① $f(x, y) = x^2 + xy$ le long du chemin défini par $(x, y) = (2t, t^2)$

$$(f \circ g)'(t) = g'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) + g'_2(t) \frac{\partial f}{\partial y}(g(t))$$

Calcul: $g'_1(t) = 2$ $g'_2(t) = 2t$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$(f \circ g)'(t) = 2(4t + t^2) + 2t \times 2t = 8t + 6t^2 \quad \text{ok}$$

Calcul direct: $f(g(t)) = f(2t, t^2) = (2t)^2 + 2t \times t^2 = 4t^2 + 2t^3$

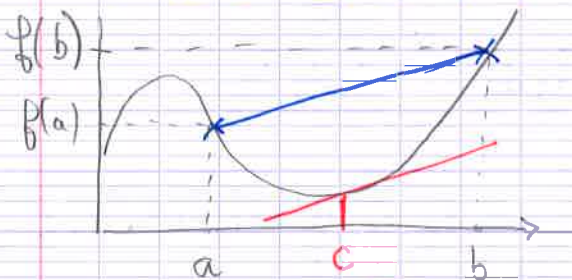
$$[f(g(t))]' = 8t + 6t^2 \quad \text{ok}$$

Plus facile pr apprendre la formule

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{d}{dt} [f(2t, t^3, t^2+1)] &= 2 \frac{df}{dx} (2t, t^3, t^2+1) \\ &\quad + 3t^2 \frac{df}{dy} (2t, t^3, t^2+1) \\ &\quad + 2t \frac{df}{dz} (2t, t^3, t^2+1) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{d}{dt} [f(g_1(t), g_2(t))] = g'_1(t) \frac{df}{dx} (g_1(t), g_2(t)) + g'_2(t) \frac{df}{dy}$$

p 43 Théorème des accroissements finis.



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{coeff directeur de la droite}$$

p 43 Preuve démonstration:

$$\psi(t) = f(\underbrace{a + t(b-a)}_{\substack{\text{vecteur} \\ \text{réel}}})$$

$$\psi(0) = f(a) \quad \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi(1) = f(b) \quad \psi \text{ vérifie les conditions d'appli du th.}$$

$$\exists t \in]0, 1[\text{ tq}$$

$$\psi(1) - \psi(0) = (1-0)\psi'(t_0)$$

$$f(b) - f(a) = \psi'(t_0)$$

avec $t_0 \in]0, 1[$

$$\psi(t) = f[a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_n + t(b_n - a_n)]$$

$$\psi'(t) = (b_1 - a_1) \times \frac{df}{dx_1} (a + t(b-a)) + (b_2 - a_2) \frac{df}{dx_2} (a + t(b-a))$$

$$+ \dots + (b_n - a_n) \frac{df}{dx_n} (a + t(b-a))$$

le nom de la Δ table ici n'a aucune incidence
c'est juste une position

Donc $\exists t_0 \in]0, 1[$ $\frac{c \in]a, b[}{\text{}} \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \frac{df}{dz_k} (a + t(b-a)) = f(b) - f(a)$

P44

Fonction Homogène

Ex: $f(X_1, X_2) = X_1^a \cdot X_2^b$
 $f(\lambda X_1, \lambda X_2) = \lambda^a X_1^a \cdot X_2^b \times \lambda^b$
 $= \lambda^{a+b} X_1^a X_2^b$

$k = a+b$ f de Cobb-Douglas, homogène de degré $a+b$.

Formule d'Euler

On démontre que (i) implique (ii) . (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= f(\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) - \lambda^k f(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ \psi'(\lambda) &= X_1 \frac{df}{dz_1} (\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) + \dots + X_n \frac{df}{dz_n} (\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) \\ &\quad - k \lambda^{k-1} f(X_1, \dots, X_n) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{df}{dz_i} (\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) - k \lambda^{k-1} f(X_1, \dots, X_n) \\ &= 0 \quad (\text{car je dérive la fonction nulle}) \end{aligned}$$

$$\psi'(1) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \frac{df}{dz_i} (X_1, \dots, X_n) = k f(X_1, \dots, X_n)$$

* Supposons f homogène de degré k

$$f(\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda^k f(X_1, \dots, X_n)$$

En dérivant % à X_i :

$$\lambda \frac{df}{dz_i} (\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda^k \frac{df}{dz_i} (X_1, \dots, X_n)$$

$$\frac{df}{dz_i} (\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda^{k-1} \frac{df}{dz_i} (X_1, \dots, X_n)$$

$$\frac{df}{dz_i} \text{ homogène de degré } k-1$$

Ex: $f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{\lambda x + \lambda y} = \sqrt{\lambda} \sqrt{x+y} = \lambda^{\frac{1}{2}} \sqrt{x+y}$
 $k = \frac{1}{2}$

$$f'_y = \frac{1}{2} (x+y)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \rightarrow \text{Remo de degré } -\frac{1}{2}$$

$f(x, y, z) = \frac{1}{x} \ln \frac{y}{z}$ Δ y et z doivent être de même signe.

Homogène de degré? -1

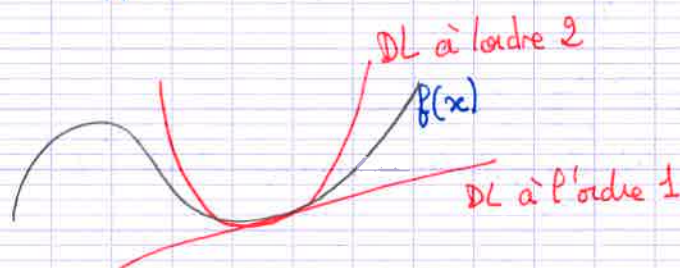
$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \frac{1}{\lambda x} \ln \frac{\lambda y}{\lambda z} = \lambda^{-1} f(x, y, z)$$

$k = -1$

$$f'_z(x, y, z) = -\frac{1}{xz} \text{ homogène de degré } -2.$$

Développement limité

*



Sans le reste.

Preuve p45

Supposons DL à l'ordre n en a

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + o((x-a)^n)$$

$$g(x) = \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + o((x-a)^n)$$

$$(f \times g)(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \cdot g^{(k-i)}(a) \frac{(x-a)^{k-i}}{(k-i)!} + o((x-a)^n)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} \left[\sum_{i=0}^k C_k^i f^{(i)}(a) g^{(k-i)}(a) \right]$$

$$C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} (fg)^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

p46 Exemple :

DL en 1 de e^x

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + O((x-1)^2)$$

DL à l'ordre 2 de $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$$f(x) = -\ln(x+1)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 - (x-0) + \frac{(x-0)^2}{2} + O((x-1)^2) \\ &= -x + \frac{x^2}{2} + O(x^2) \end{aligned}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) \text{ soit } X \text{ tq } \ln X \text{ avec } X = \frac{1}{x+1}$$

p46

$$\text{ex : } f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) \text{ à l'ordre 2 en 0}$$

$$1+e^x = 1 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^2)$$

$$X = \frac{1+e^x}{2} = \frac{1+x}{2} + \frac{x^2}{4} + O(x^2)$$

en 1

$$\begin{aligned} \ln(X) &= 1 \cdot (X-1) - \frac{(X-1)^2}{2} + O((X-1)^2) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)^2}{2} + O(x^2) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{8} + O(x^2) \end{aligned}$$

En 0

$$\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = \boxed{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + O(x^2)}$$

DL en a à l'ordre n

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + O((x-a)^n)$$

P47

DL d'une fct^e de 2 variables :

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) \\ &+ f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &+ f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned} \right\} \text{approximat}^{\circ} \text{ affine}$$

$$+ \frac{1}{2} f''_{x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2$$

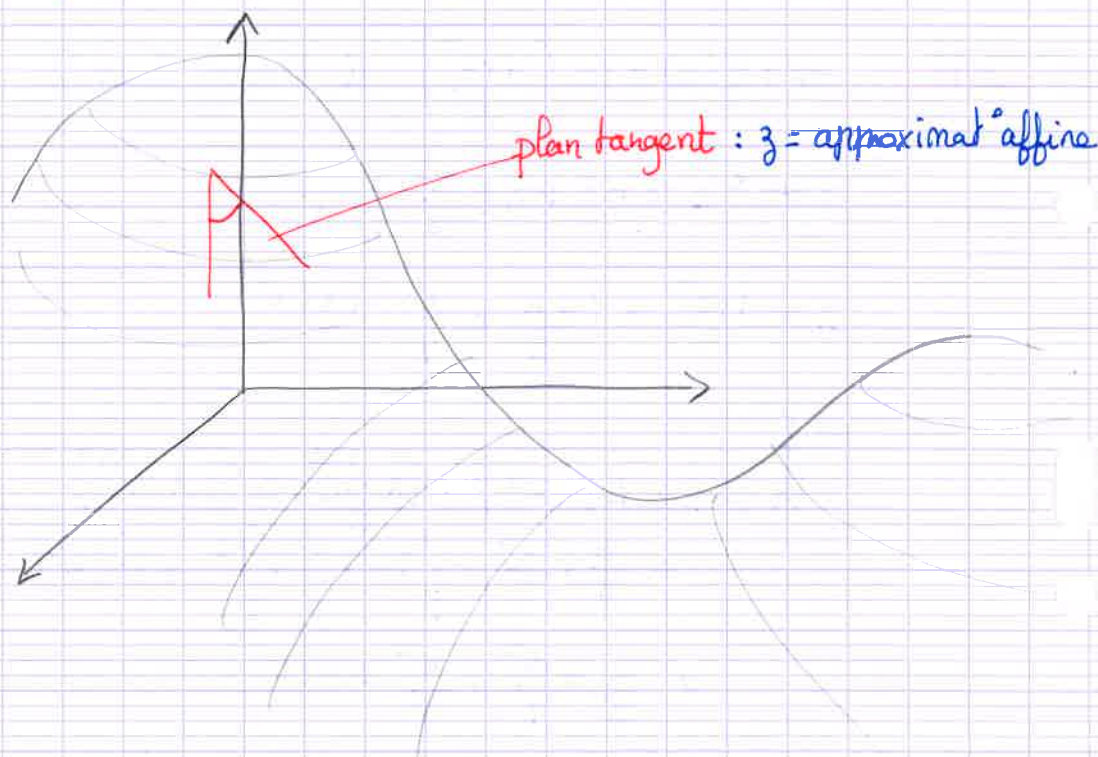
$$+ \frac{1}{2} f''_{y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

$$+ f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)$$

$$+ o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$$

approximat^e

quadratique



DL d'une fct^e à n variables à l'ordre 2.

ex : à 3 variables :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x_0, y_0, z_0) \\ &+ f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ &+ f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} f''_{y^2}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2$$

$$+ \frac{1}{2} f''_{z^2}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)^2 + f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0)$$

$$+ f''_{xz}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)(z-z_0) + f''_{yz}(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)(z-z_0) \\ + O[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]$$

p 48

Fonctions implicites :

Mq (ii) $\Rightarrow$ (iii) p 48

$$F(x, g(x)) = C \quad (ii)$$

On dérive sur un voisinage de (x_0, y_0)

$$\underbrace{1}_{\text{dérivée de } x=1} \cdot \frac{dF}{dx}(x, g(x)) + \underbrace{g'(x)}_{(4)} \frac{dF}{dy}(x, g(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow g'(x) = - \frac{\frac{dF}{dx}(x, g(x))}{\frac{dF}{dy}(x, g(x))}$$

En x_0 comme $g(x_0) = y_0$

$$g'(x_0) = \frac{-\frac{dF}{dx}(x_0, y_0)}{\frac{dF}{dy}(x_0, y_0)} \quad (iii)$$

p 49

ex: $f(x, y, z) = z^3 + 3xz + 2x^3 + xy^2 + y^3$

$$f(x, y, z) = 0$$

Vérifions que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$

$$f(1, 2, -2) = -8 - 6 + 2 \times 1^3 + 1 \times 2^2 + 2^3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \text{bien à } \mathcal{C}. \quad \text{car } \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / f(x, y, z) = 0 \right\}$$

$$\frac{df}{dz} = 3z^2 + 3x \quad \frac{df}{dz}(1, 2, -2) = 12 + 3 = 15 \neq 0$$

D'après le théorème, $\exists g$ au voisinage de $(1, 2, -2)$
on ait $z = g(x, y)$ pour les pts de $\mathcal{C}$.

$$\frac{df}{dx} = 3z + 6x^2 + y^2 \quad \frac{df}{dx}(1, 2, -2) = 4 \quad \frac{df}{dy} = 2xy + 3y^2$$

$$\frac{df}{dy}(1, 2, -2) = 16$$

$$g'_x(1,2) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-2)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-2)} = \frac{-4}{15}$$

$$g'_y(1,2) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-2)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-2)} = \frac{-16}{15}$$

A l'ordre 1 $g(x,y) = g(1,2) + g'_x(x-1) + g'_y(y-2) + o(x-1) + o(y-2)$

$$z = -2 - \frac{4}{15}(x-1) - \frac{16}{15}(y-2) + o(x-1) + o(y-2)$$

On vient de résoudre l'équation localement.

p49

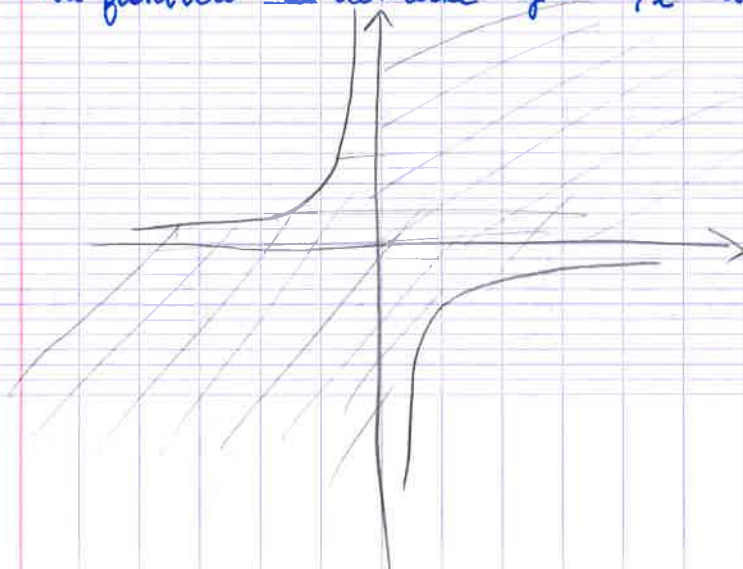
Exercice

Soit $f(x,y) = \ln(1+xy)$

$$1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D_f \Leftrightarrow 1+xy > 0$$

$$D_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / xy > -1 \right\}$$

La frontière du domaine $y = -1/x$ avec $x \neq 0$



$D_f =$ les pts entre les 2 C.

2) f est $\mathcal{C}^\infty$ comme $\ln(\text{polynôme})$ sur l'intérieur de D_f donc sur D_f

3) $f(x, y) = \ln(1 + xy)$

$$f'_x(x, y) = \frac{y}{1+xy} = y(1+xy)^{-1} \quad f'_y(x, y) = \frac{x}{1+xy} = x(1+xy)^{-1}$$

4) $f''_{xx} = -y^2(1+xy)^{-2}$

$$f''_{yy} = -x^2(1+xy)^{-2}$$

$$f''_{xy} = f'_{yx} = (1+xy)^{-1} - yx(1+xy)^{-2} \quad (\text{Schwarz})$$

5) $f(x, y) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \frac{1}{2} f''_{xx}(0, 0)x^2 + \frac{1}{2} f''_{yy}(0, 0)y^2$

$$+ f''_{xy}(0, 0)xy + o(x^2 + y^2)$$

$$f(x, y) = 0 + 0x + 0y + \frac{1}{2} 0x^2 + \frac{1}{2} 0y^2$$

$$+ 1xy + o(x^2 + y^2)$$

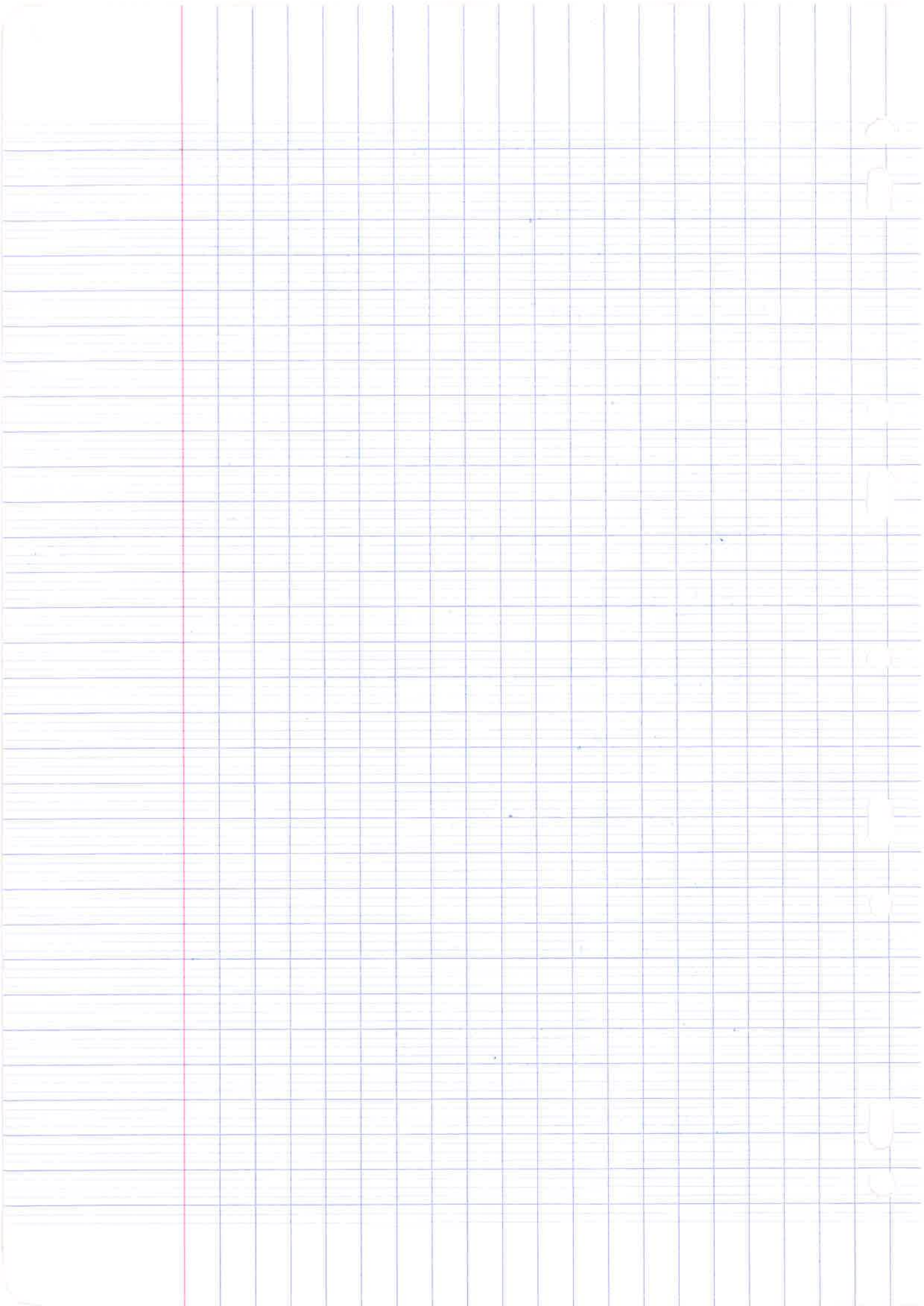
$$f(x, y) = xy + o(x^2 + y^2)$$

6) $\hat{f}_{(0,0)}(x, y) = 0$

7) $\hat{f}_{(0,0)}(x, y) = xy \quad (0,1; 0,1) \text{ est proche de } (0,0)$

$$f(0,1; 0,1) \simeq \hat{f}_{(0,0)}(0,1; 0,1) \\ \simeq 0,1 \times 0,1 = 0,01$$

$$\ln(1,01) \simeq 0,01 //$$



Pour det: si on intervertit 2 colonnes $\rightarrow$ change de signe.

chap 4

Formes quadratiques

p51

ex 1 $W \left(a \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$

$$= W \left[\begin{pmatrix} ax_1 + bx_1' \\ ay_1 + by_1' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= (ax_1 + bx_1')x_2 - (ay_1 + by_1')y_2$$

$$= a(x_1x_2 - y_1y_2) - b(x_1'x_2 - y_1'y_2)$$

$$= a W \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] + b W \left[\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] \rightarrow \text{West bilinéaire}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}$$

ex 2: $W \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}$$

P52 ex 1 $Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy - 2y^2 + 3z^2$

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \quad \text{symétrique}$$

$$Q(x, y, z) = {}^t X A X =$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ x - 2y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x + y \\ x - 2y \\ 3z \end{pmatrix} = 3x^2 + xy + xy - 2y^2 + 3z^2$$

$$= z(3x+y) + y(x-2y) + 3 \times 3z$$

$$= 3x^2 + 2xy - 2y^2 + 3z^2$$

ex 2 :

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}$$

Commencer par la diagonale

ex

$$Q(x, y) = z(y+2x) - y(3x-y)$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 = \underset{\oplus}{x^2} + \underset{\oplus}{(x-y)^2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q(x, y) = x^2 + 2y^2$$

Matrice orthogonale :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M. normée :

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ +\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

Matrice orthogonale:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

PS3

Preuve de Prop 1

Soit $P = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m)$ orthogonale.

$${}^tP = \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ \vdots \\ {}^tv_m \end{pmatrix}$$

$$(v_1 \ \dots \ v_j \ \dots \ v_m)$$

transposée de $P \times P \rightarrow$

$${}^tPP = \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ {}^tv_i \\ {}^tv_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_j & \dots & v_m \end{pmatrix}$$

C_{ij}

Par définition, $C_{ij} = v_i \cdot v_j$ produit scalaire.

Comme P orthogonale $i \neq j \Rightarrow v_i \cdot v_j = 0 = C_{ij}$

P normée: $i = j \Rightarrow C_{ii} = v_i \cdot v_i = \|v_i\|^2 = 1$

$${}^tPP = I$$

Conclusion: $P^{-1} = {}^tP$

$$Q(X) = {}^tXAX \quad \text{or } A = PDP^{-1}$$

$$= PD{}^tP \quad \text{si } P \text{ orthogonale}$$

$$Q(X) = {}^tXP \cdot D \cdot {}^tPX$$

$$\text{Soit } Y = {}^tPX \Rightarrow {}^tY = {}^tXP$$

$$\Rightarrow Q(X) = {}^tYDY$$

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i (y_i)^2$$

$$C_{ij} = 0$$

$$C_{ii} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P53 Exemple :

$$Q(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = -\lambda(2-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$$

$$\text{Trace} = 1+1 = \sum \lambda_i \text{ ok}$$

$$\text{Det} = 0 = 0 \times 2 = \prod \lambda_i \text{ ok}$$

$$E_{\lambda_1=0} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-y \\ -x+y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = x \quad V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad \|V_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$E_{\lambda_2=2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -x-y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -x \quad V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|V_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow W_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = {}^t P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Posons } Y = {}^t P X = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 (x+y) \\ \sqrt{2}/2 (x-y) \end{pmatrix}$$

$$D_X {}^t P X \quad Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (x+y) \right)^2 + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (x-y) \right)^2 = (x-y)^2$$

$Q =$ dans la nouvelle base orthogonale

X pk pos?
 ${}^t X \times P \times D \times {}^t P \times X$
 $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 P53

ps ex: $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

pk?

$$\det = \prod \lambda_i$$

Valeur propre évidente $\lambda = 0$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1+C_2+C_3 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1}} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 3$$

Verif Trace = 3 = $\sum \lambda_i$ ok

Det = 0 = $\prod \lambda_i$ ok.

$$E_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=y \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y-z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

$$E_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0} = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} / (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut aussi choisir $V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad V_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

leur produit scalaire est nul dc $V_1 \perp V_2$

qui forment une base orthogonale de $E_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$

* $V_1 \times (aV_1 + bV_2) = \vec{0}$

$$\Rightarrow 2a + b = 0$$

$$\Rightarrow b = -2a$$

par ex $a = 1$
donc $b = -2$

difficile à
trouver donc
donné par le
prof

$$\|V_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{6} = 1$$

$$U_1 \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1 \times \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 1 \times \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -2 \times \frac{\sqrt{6}}{6} \end{array}$$

$$\|V_2\| = \sqrt{2}$$

$$U_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

$$E_{\lambda 3} = 3$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y+z}{2} \\ y = \frac{x+z}{2} \\ z = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z \quad V_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|V_3\| = \sqrt{3} \quad U_3 \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

$$A = P D P^T$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{6}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$$

$$Y = t P X$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 (x+y-2z) \\ \sqrt{2}/2 (y-x) \\ \sqrt{3}/3 (x+y+z) \end{pmatrix}$$

$D_X \subset P_X$

$$= Q(X) = 0 \left[\frac{\sqrt{6}}{6} (x+y-2z) \right]^2 + 0 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (y-x) \right]^2 + 3 \left[\frac{\sqrt{3}}{3} (x+y+z) \right]^2 \quad (2) \leftarrow \text{car } \text{tXP}$$

$$Q(X) = (X+Y+Z)^2$$

$$Q(x,y,z) = x^2 + x(y - \frac{z}{2}) + \dots \quad \text{termes en } y \text{ et } z \text{ seulement}$$

$$= \left(x + \frac{1}{2} (y - \frac{z}{2}) \right)^2 - \left[\frac{1}{2} (y - \frac{z}{2}) \right]^2 + \text{reste}$$

trop compliqué donc on s'est arrêté là

p. 55

Exemple de la méthode de Gauss

$$Q(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 - 2yz - z^2$$

$$Q = \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 - 2yz - z^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} (y^2 - \frac{8}{3} yz) - z^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left[\left(y - \frac{4}{3} z \right)^2 - \frac{16}{9} z^2 \right] - z^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(y - \frac{4}{3} z \right)^2 - \frac{4}{3} z^2 - z^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(y - \frac{4}{3} z \right)^2 - \frac{7}{3} z^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

forme linéaire indépendante

donc c'est une décomposition canonique



et pos $-7/3$

Signature ($n_+ = 2$ $n_- = 1$)

$\Rightarrow \text{Det} < 0$ car deux valeurs propres $(+)$ et une négative

$$Q(X) = \alpha(x+y+z)^2 + \beta(y+z)^2 + \gamma z^2$$

* Si α, β , et γ sont ≥ 0

→ forme semi définie positive

Si $\gamma = -2$ sur $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ la forme est < 0

forme particulière:
définie positive

Si α, β et $\gamma > 0$ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=0$

$Q(x,y) = 2(x+y)^2$ $\begin{matrix} n_+ = 1 \\ n_- = 0 \end{matrix}$: défini positive

$Q(x,y) = \alpha(x+y)^2 + \beta y^2$
avec $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

Sur $\begin{cases} x+y=0 \\ \text{et } y \neq 0 \end{cases}$ $Q < 0 \rightarrow$ défini $\ominus$

sur $\begin{cases} y=0 \\ \text{et } x \neq 0 \end{cases}$ $Q > 0$ défini $\oplus$

P56

exemple : $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + \frac{1}{2}yz$

$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$

Minors diagonaux principaux :

Minors $_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

il y a n minors.

Les minors servent à connaître

signe des λ_i

$$M_1 = 1 \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Q est définie positive

p57

Ex :

$$Q_1(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\det A > 0$ donc soit les λ_i sont tous
les 2 $\oplus$ ou $\ominus$

trace = 3 > 0 donc λ_i sont > 0

donc Q_1 est définie positive

autre méthode :

$$M_1 = 1$$

$$M_2 = 1$$

ts les mineurs diagonaux principaux positifs (strictement)

$$Q_1 = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + y^2 \quad n^+ = 2$$

$$* \quad Q_2 = xy$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = -1/4 < 0$$

$$1 \text{ vp} > 0 \quad 1 \text{ vp} < 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$$

Q_2 est non définie

$M_2 = -1/4$ ni la première proposition ni la seconde ne s'appliquent
pour $M_2 < 0$

$\Rightarrow Q_2$ est non définie

$$Q_2 = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \quad n^+ = 1$$

$$n_- = 1$$

$$Q_3 = 2x^2 + 8y^2 + 8xy$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\det = 0$$

on a 0 comme vp.

on sait que A est semi-définie.

$\lambda_1 = 0$
et comme

$\sum \text{diag} \leq \lambda_i$

$$0 + \dots = 8 + 8$$

$$0 + \dots = 10$$

$$\lambda_2 = 10$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$$

Q_3 est semi déf positive



$$\begin{aligned}
 Q_3 &= 2(x^2 + 4xy) + 8y^2 \\
 &= 2((x+2y)^2 - 4y^2) + 8y^2 \\
 &= 2(x+2y)^2 + 0y^2
 \end{aligned}$$

$n+ = 1$
 $n- = 0$

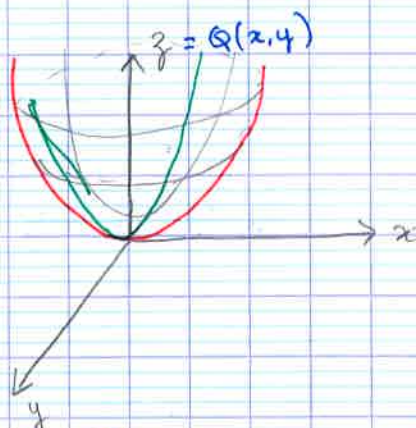
$$\begin{aligned}
 Q_4 &= x^2 - 2xy + y^2 \\
 &= (x-y)^2
 \end{aligned}$$

2 termes can. dim 2
 semi def positive

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det = 0 \quad \lambda_1 = 0 \\
 \text{Trace} = 2 \quad \lambda_2 = 2$$

$$Q(x, y) = x^2 + y^2$$

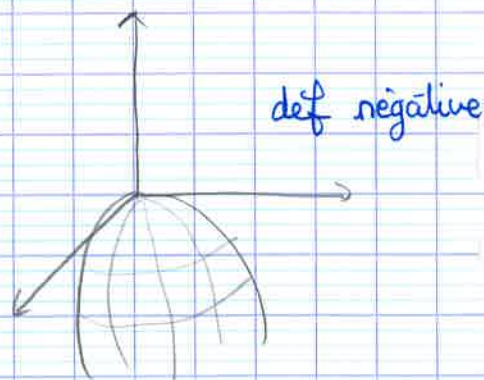
definie positive



ballon de rugby qui part vers l'infini
 on admet un min global de 0 atteint uniquement à l'origine.

$$Q(x, y) = -(x^2 + y^2)$$

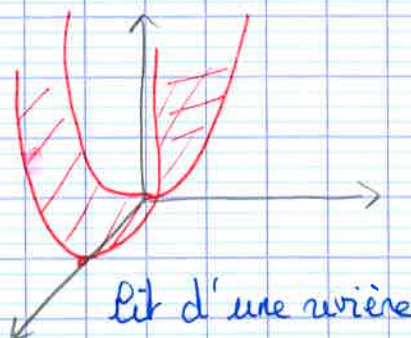
Max global atteint en 0
 atteint uniquement à l'origine



$$Q(x, y) = x^2$$

est semidef positive.

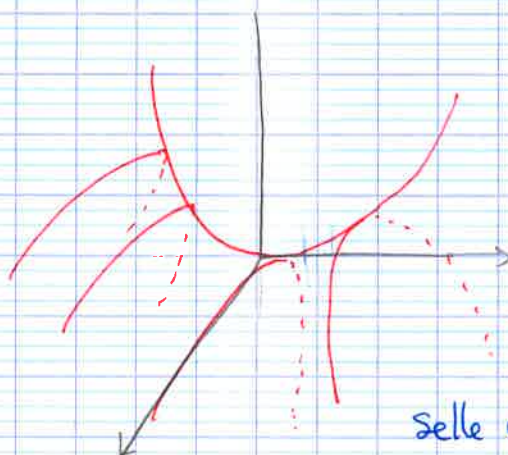
pour $y = 2$ $Q = x^2$



admet un min global qui vaut 0 atteint par une infinité de pts
(sur tout l'espace propre de $\text{Ker } A$) matrice associée.

$$Q = x^2 - y^2$$

non définie



Selle de cheval

elle n'a ni max ni min.

mais l'origine est un pt particulier

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad \text{donc plan tangent est horizontal}$$

(0,0) est un point selle : (ni max ni min)

Ex P58

$$\begin{aligned} * Q(x, y) &= x^2 + y^2 - xy \\ &= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 \\ &= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \quad \text{définie } \oplus \end{aligned}$$

admet un min global de 0 en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} * Q(x, y) &= x^2 - 2y^2 + 2xy \\ &= (x+y)^2 - 3y^2 \quad \text{non définie} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Sur } (x+y) = 0 \rightarrow y = -x$$

$$Q(x, -x) = -3x^2 \quad \text{définie négatif} \rightarrow \text{sur ce ss-espace max global}$$

$$\bullet \text{ Sur } y = 0$$

$$Q(x, 0) = x^2 \rightarrow \text{définie positif} \rightarrow \text{sur ce ss-espace : min global}$$

$$y = 2x$$

$$Q(x, 2x) = (3x)^2 - 3(2x)^2 = -3x^2$$

0 Max global de ce sous espace $y = 2x$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Rang = 3 forme linéaire indépendante $\Rightarrow$ décomposée unique

$$Q(X) = {}^t X A X$$

$$\text{sur } \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 6yz = (x+y)^2 + (y+3z)^2 - 10z^2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^t B & A \end{bmatrix}$$

$n = 3$ variables

$p = 2$ contraintes

il faut calculer le dernier mineur diagonal de H .

* Si forme quadratique déjà diagonale

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Mémo techniquement :

p59 ex : $Q(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 = (x-y)^2 - 2y^2$

sur $x+y=0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice des contraintes
 $\downarrow$ on peut la voir c'est la jacobienne des contraintes
1x et 1y

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

t_B (green box around first column)
 B (blue box around first two columns)
 A (red box around last two columns)

nb de variables: 2 car y et x

$\downarrow$
1 contrainte

$$n = 2$$

$$p = 1$$

$$n - p = 2 - 1 = 1$$

$$\text{Dét } H = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

C'est du signe de $(-1)^p$ donc Q est définie positive sur les contraintes et admet un minimum global de 0 en $(0,0)$ sous les contraintes.

- $\left. \begin{array}{l} \text{signe de Dét } H \Rightarrow \ominus \\ \text{signe de } (-1)^n = (-1)^2 \Rightarrow \oplus \end{array} \right\} \neq \text{pas déf négative}$

- $\text{Dét } H \Rightarrow \ominus$

$(n-p) = 1$: le mineur principal -1 est $\Rightarrow \ominus$

signe de $(-1)^p = (-1)^1 \Rightarrow \ominus$

$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{def } \oplus$

chapitre 5

Optimisation libre

Ne jamais dire : "l'origine est un max global"
p. 62 : Preuve par contraposition : (Non B $\Rightarrow$ Non A)

Soit x^* Supposons $f'(x^*) \neq 0$

DL à l'ordre 1 de f en x^*

$$x \in U(x^*)$$

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x - x^*) + o(\cancel{x - x^*})$$

↑
ce terme est négligeable
pour x proche de x^*
car $f'(x^*) \neq 0$

$$f(x) - f(x^*) \approx f'(x^*) (x - x^*)$$

Supposons $f'(x^*) > 0$

$$\text{Si } x > x^* \quad f(x) - f(x^*) > 0$$

pas de max en x^*

$$f(x) - f(x^*) < 0$$

pas de min en x^*

Max local

Max global

pt d'inflexion

Min local

Pas de Min global

5.2.2 DL à l'ordre 2 en x^* de f

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*) (x - x^*) + \frac{1}{2} f''(x^*) (x - x^*)^2 + o((x - x^*)^2)$$

||
0 car x^* pt critique

$$f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2} f''(x^*) (x - x^*)^2 + o((x - x^*)^2)$$

Par contraposition si $f''(x^*) > 0$

sur un voisinage suffisamment proche de x^*

X
ok ce terme
a disparu?

$$f(x) - f(x^*) \approx \frac{1}{2} f''(x^*) (x - x^*)^2 > 0$$

$$f(x) > f(x^*)$$

→ Pas de max local en x^* .

5.2.3

p63 Exemple: $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$

Pts candidats : $f'(x) = 1 - x = 0$
 $x = 1$

CSQ $f''(x) = -1$

$f''(1) = -1 < 0$ En $x=1$ on a un max local qui vaut $f(1) = \frac{3}{2}$

5.2.4. Preuve contraposée

→ Soit k d'ordre impair

DL à l'ordre k

$$f(x) - f(x^*) \approx \underbrace{f^{(k)}(x^*)}_{\neq 0} \underbrace{(x - x^*)^k}_{k!}$$

change de signe

Ni max ni min en x^*

⇐ k d'ordre pair

$$f(x) - f(x^*) \approx \underbrace{f^{(k)}(x^*)}_{\neq 0} \underbrace{(x - x^*)^k}_{k!}$$

$-x- = f_x + \text{car pair}$

Signe constant car k pair

⇒ en x^* on a un extremum.

gradient

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*) (x - x^*) + o(x_1 - x_1^*) + \dots + o(x_n - x_n^*)$$

Supposons le gradient non nul $\frac{df}{dx}(x^*) \neq 0$

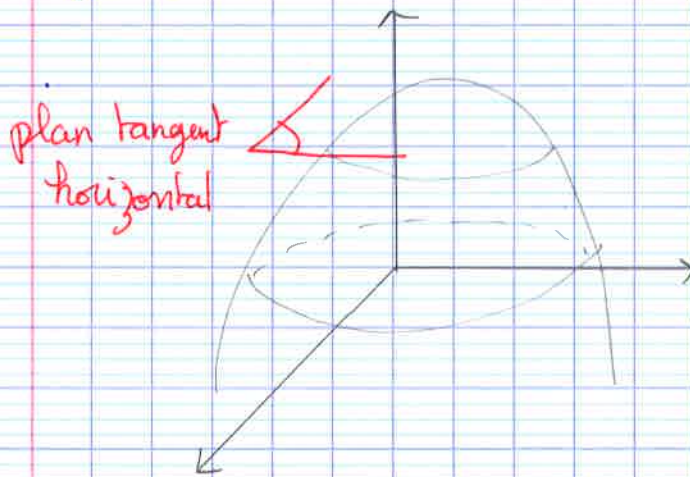
$$x = x^* + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$f(x) \approx f(x^*) + t \frac{df}{dx}(x^*)$$

$f(x) - f(x^*)$ change de signe lorsque t change de signe
 $\Rightarrow$ Pas d'extremum en x^*

On aurait pu faire autrement: DL en fixant les x_i
 $\left[\psi(x) = f(x_1, x_2^*, \dots, x_n^*) \right]$



Par contreposition:

On suppose d^2f non semi définie négative

donc $\exists \lambda_i$ et v_i associé où $\lambda_i > 0$

Strictement positive.

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*) (x - x^*) + \frac{1}{2} (x - x^*)^t D^2 f(x^*) (x - x^*) + o(\|x - x^*\|^2)$$

$$f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2} (x - x^*)^t D^2 f(x^*) (x - x^*) + \text{reste}$$

Prenons $x = x^* + h v_i$ $x - x^* = h v_i$

$$f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2} h^t v_i D^2 f(x^*) h v_i + \text{reste}$$

$$= \frac{1}{2} h^2 v_i^t D^2 f(x^*) v_i = \frac{1}{2} h^2 \lambda_i \|v_i\|^2 + \text{reste}$$

$d(\|v_i\|^2)$

donc $f(x) - f(x^*)$ est du signe de $\frac{1}{2} h^2 \lambda_i \|V_i\|^2$ et donc > 0
 Ce qui implique qu'en x^* il n'y a pas de maximum local
 (au direct^e montante)

qd $V_p > 0 \rightarrow$ direct^e montantes

$< 0 \rightarrow$ qui descendent

$= 0 \rightarrow$ on est embêtés $\rightarrow$ le reste est important.

p. 64 5.3.5 Exemple pour connaître la nature d'un pt candidat:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 - xy + z^2$$

CN1 (condition nécessaire du 1^{er} ordre)

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{df}{dy} = 2y - x = 0 \\ \frac{df}{dz} = 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y)^2 - y \Rightarrow 12y^2 - y = 0 \\ x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(12y - 1) = 0 \\ x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (1) \\ \text{ou } 12y - 1 = 0 & \Rightarrow y = \frac{1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{12} \\ z = 0 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

On a 2 points candidats : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/12 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{CS2} \begin{cases} \frac{d^2f}{dx^2} = 6x \\ \frac{d^2f}{dy^2} = 2 \\ \frac{d^2f}{dz^2} = 2 \\ \frac{d^2f}{dx dy} = \frac{d^2f}{dy dx} = -1 \\ \frac{d^2f}{dx dz} = \frac{d^2f}{dz dx} = 0 \\ \frac{d^2f}{dy dz} = \frac{d^2f}{dz dy} = 0 \end{cases}$$

(matrice Hessienne)

$$\Leftrightarrow D^2f = \begin{bmatrix} 6x & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D^2f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \times [(\lambda^2 - 2\lambda) - 1]$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

$$\lambda_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \rightarrow < 0$$

$$\lambda_2 = 1 + \sqrt{2} > 0$$

$$\lambda_3 = 2 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} n_- = 1 \\ n_+ = 2 \end{array} \right\} D^2f \text{ non défini} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{point selle}$$

cas: 2^{ème} point candidat:

$$D^2f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-1)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} > 0, \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

$$\lambda_3 = 2 > 0$$

Calcul des lim car
H Hesse en 1 pr précis!

$$\left. \begin{array}{l} n_- = 0 \\ n_+ = 3 \end{array} \right\} D^2f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 0\right) \text{ défini } (+) \Rightarrow \text{min LOCAL}$$

$$\text{Min global} = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 0\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{72} = -\frac{1}{432}$$

en pose $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Remarque: $f\left(t \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -t^3$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(-t, 0, 0) = -\infty \Rightarrow \text{pas de minimum GLOBAL}$$

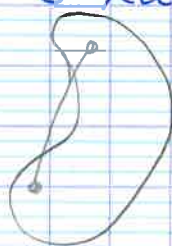
on a choisit $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car D^2f dépend de x et on essaie de voir si ça va + bas que le min qu'on a trouvé $\rightarrow$ voir si c'est un compact ou non

5.4. Fonctions convexes et concaves.

5.4.1 Ensemble convexe

Si $t \in [0, 1]$

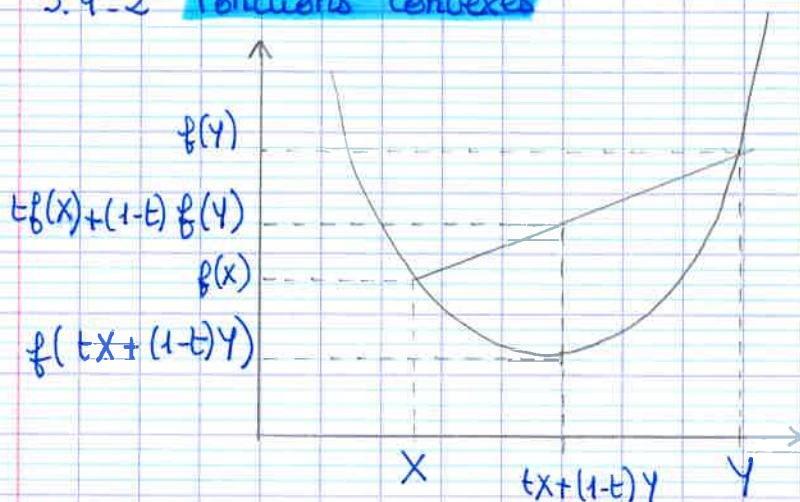
$$tX + (1-t)Y \in X \cup Y$$



convexe

pas convexe ni concave

p. 64 5.4.2 Fonctions convexes



$\Rightarrow$ Une fonction f est convexe ssi entre deux points de la courbe, le graph de f est en dessous du segment reliant ces 2 pts.

$$\text{ex: } \left. \begin{array}{l} x^2 \\ e^x \\ \frac{1}{x} \text{ pour } x > 0 \end{array} \right\} \text{strictement convexe}$$

$$\left. \begin{array}{l} -x^2 \\ -e^x \\ \ln x \\ \sqrt{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{strictement concave} \\ \rightarrow x > 0 \\ x \geq 0 \end{array}$$

5.4.4 Propriétés :

5.4.5 Retour sur l'optimisation :

→ Si pt critique → f étant convexe, il y a un min global en ce pt.

⚠ ~~X~~ min global pour tous les convexes.

p 65 5.4.6: Exemples

• $f(x,y) = x^2 + y^2$

CN1 $\begin{cases} \frac{df}{dx} = 2x = 0 \\ \frac{df}{dy} = 2y = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pt candidat unique

CN2 $\begin{cases} \frac{df}{dx} = 2 \\ \frac{df}{dy} = 2 \\ \frac{df}{dx dy} = \frac{df}{dy dx} = 0 \end{cases}$

$D^2 f = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0 \quad \forall X$

⇒ défini positif ⇒ f strictement convexe
⇒ min local en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
= $f(0,0) = 0$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t, 0) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} (-t, 0) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} (0, -t) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} (0, -t) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{pas de min global}$

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1$$

$$\text{CN1 : } \begin{cases} \frac{df}{dx} = 4x^3 + 2xy^2 = 0 \\ \frac{df}{dy} = 2x^2y + 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(2x^2 + y^2) = 0 \quad (1) \\ 2y(x^2 + 2y^2) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 2x^2 + y^2 = 0$$

$$a) \text{ Supposons } x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \Rightarrow y = 0 \text{ ou } 2y^2 + x^2 = 0$$

$$\text{Supposons } y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Supposons } x^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \text{ Supposons } 2x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

Conclusion: on a un seul pt candidat: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{CN2 : } \begin{cases} \frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2 + 2y^2 \\ \frac{d^2f}{dy^2} = 2x^2 + 12y^2 \\ \frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d^2f}{dydx} = 4yx \end{cases} \quad D^2f = \begin{bmatrix} 12x^2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 + 12y^2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 + f(0, 0) \\ f(x, y) > f(0, 0) \text{ pour } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{En } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ on a un min global} \end{array} \right)$$

Pour déterminer signe des λ :

$$\det D^2f = (12x^2 + 2y^2)(2x^2 + 12y^2) - 16x^2y^2 \\ = 24x^2 + 24y^2 + 132x^2y^2 \geq 0$$

Trace: $14(x^2 + y^2) \geq 0$ donc λ_1 et $\lambda_2 \geq 0$ $\hookrightarrow \lambda_i$ du m^{me} signe

f semi déf $(+)$ $\rightarrow$ convexe
en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
min GLOBAL =
 $f(0, 0) = 1$

$$f(x, y) = x^4 + y^3 + y^2$$

$$\text{CN1 : } \begin{cases} \frac{df}{dx} = 4x^3 = 0 \\ \frac{df}{dy} = 3y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(2 + 3y) = 0 \end{cases}$$

pts candidats : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$$\text{CN2 : } \begin{cases} \frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2 \\ \frac{d^2f}{dy^2} = 6y + 2 \\ \frac{d^2f}{dx dy} = \frac{d^2f}{dy dx} = 0 \end{cases} \quad D^2f = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y + 2 \end{bmatrix}$$

$$D^2f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Au tour de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ les valeurs propres $12x^2 \geq 0$
 $6y + 2 \geq 0$

donc D^2f semi défini $\oplus$ au voisinage de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

f est localement convexe en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 car on a remplacé par $(0, 0)$ dans D^2f

On a un minimum local $= f(0, 0) = 0$

$$D^2f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Comme $\lambda = -2$ valeur propre ie direction de descente
 $\downarrow$
 vp

$\Rightarrow$ pas de min local

$\Rightarrow$ soit max local

Soit pt selle

ici : pt selle

? X

En $\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ $D^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Les vp au voisinage de $\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ sont $12x^2 > 0$ en dehors de $\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$
 $6y+2 < 0$

→ pas de convexité ou concavité locale

Comme en $(0; -2/3)$ l'une des vp est $-2 < 0$

⇒ pas de Min local

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{4}{27} > 0$$

$$f(h(0,1) + (0, -2/3)) = f(h, -2/3)$$

$$f(h, -2/3) = h^4 + f(0, -2/3) = h^4 - \frac{4}{3}$$

$$> f(0, -2/3) \text{ si } h \neq 0$$

direction de montée donc $(0; -2/3)$ est un point selle.

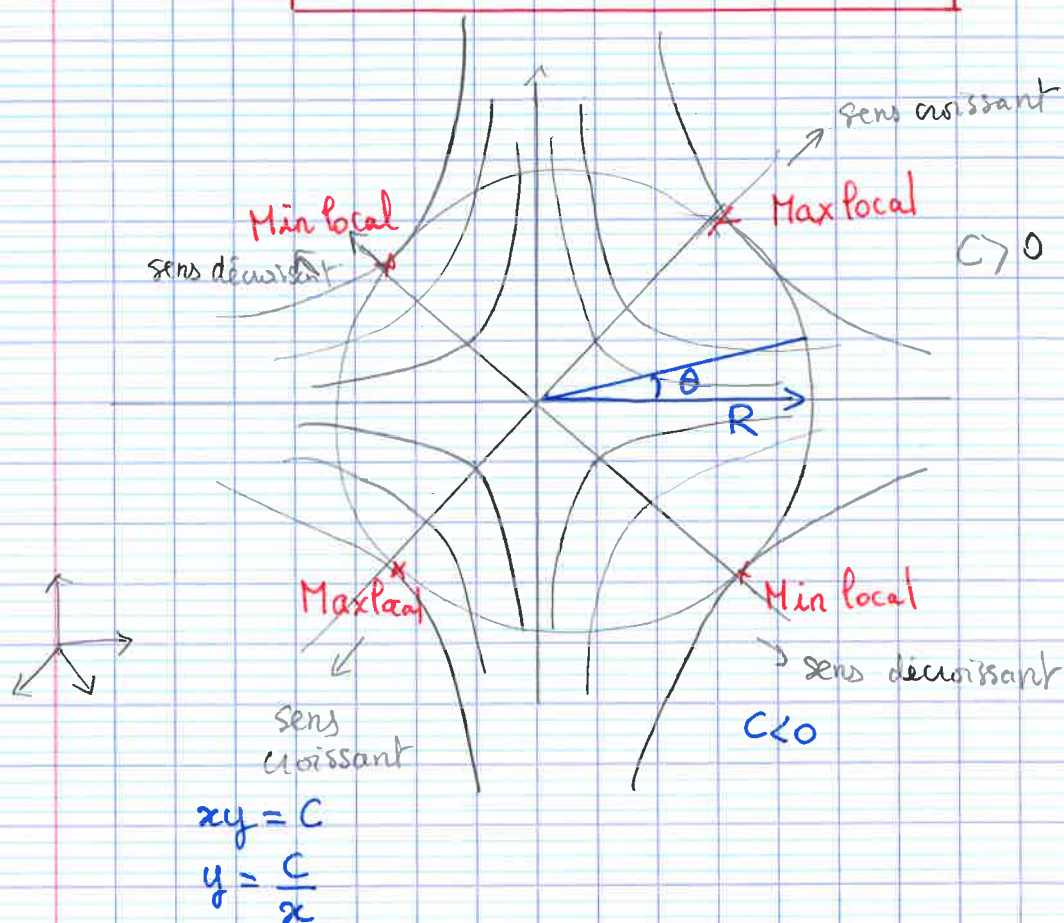
$$f(x, y) = x^4 + y^3 + y^2$$

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow -\infty}} f(x, y) = \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow -\infty}} y^3 + y^2 = -\infty$$

Pas de min global (Pas de max global car pas de max local)

chapitre 6
p 67

Optimisation sous contraintes



p 69 Ex: * $x^2 + y^2 = 2$ impossible d'exprimer en une équation $y = f(x)$
 * $e^y = 2 + x^2$
 $y = \ln(2 + x^2)$ oui on peut substituer y à cette valeur
 et oublier la contrainte car $y = f(x)$ où f est définie partout.

Ex de pbm

$$\text{Max } x + xy^2$$

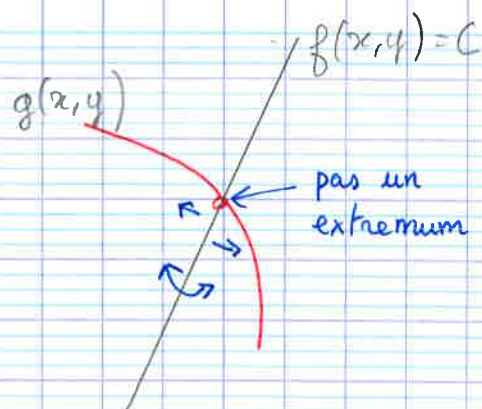
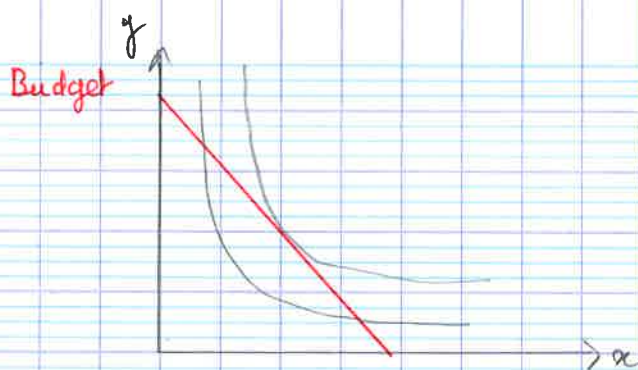
$$\text{Sous contrainte } x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow \text{Max: } x + x(1 - x^2) = 2x - x^3$$

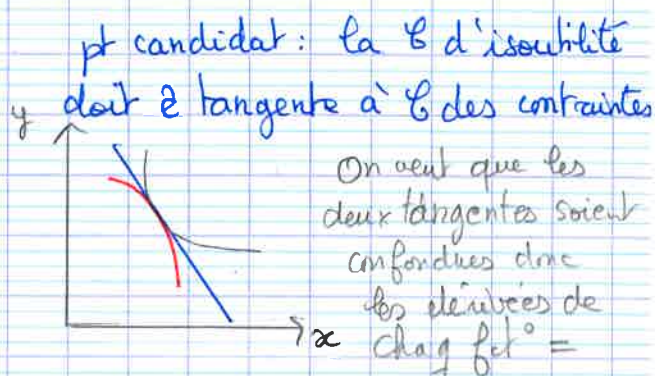
$$\text{sc } -1 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow \text{Max } 2x - x^3$$

$$\text{sc } x^2 + y^2 = 1$$



$$\underbrace{P_x x + P_y y - R = 0}_{g(x, y) \text{ contrainte}}$$



$$f(x, y) = C \\ \Leftrightarrow y = f(x)$$

Si $\frac{df}{dy} \neq 0$ Th des fonctions implicites

$$\text{avec } y'(x) = \frac{-\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

$$\bullet \quad g(x, y) = 0$$

Si $\frac{dg}{dy} \neq 0$ on a la même chose

$$\Leftrightarrow y = y_1(x) \quad \text{avec} \quad y_1(x) = \frac{-\frac{dg}{dx}}{\frac{dg}{dy}} = \frac{-P_x}{P_y}$$

6.5.1 Qualificat° des contraintes

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$x \mapsto (g_1(x) \dots g_p(x))$$

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_p(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \uparrow p \rightarrow J_p$$

Exemple p 71 :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad (1) \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Calcul de la jacobienne des contraintes
⚠ on est dans $\mathbb{R}^3$ car (x, y, z)

$$Jg = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul du dét associé

$$\ast \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2y \quad \text{tous les pts pour lesquels } y \neq 0 \text{ sont qualifiés}$$

$$\ast \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x \quad \text{tous les pts pr lesquels } x \neq 0 \text{ sont qualifiés}$$

$$\Rightarrow \text{Problème : } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Mais en fait ces pts ne sont pas un pbm

car d'après (1) $x^2 + y^2 = 4$ et les points du "pbm" ne sont pas dans le domaine

→ donc tous les points du domaine sont qualifiés

Exemple p 72

$$\text{Max } x^2 + 4yz$$

$$\text{s.c. } x + y = 1$$

Qualification

$Jg = (1 \ 1 \ 0)$ de rang 1
Les contraintes sont "partout qualifiées" (partout sur le domaine)

ne pas oublier
car il y a z

13/1/30 → 16/1/11
30/11
07/12

p43

$$f(x, y, \lambda) = x^2 + 4yz - \lambda(x + y - 1)$$

$$\text{CN1: } \begin{cases} \frac{df}{dx} = 2x - \lambda = 0 \quad (1) \\ \frac{df}{dy} = 4z - \lambda = 0 \quad (2) \\ \frac{df}{dz} = 4y = 0 \quad (3) \\ x + y - 1 = 0 \quad (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \Leftrightarrow x = 1 \\ (2) \Leftrightarrow y = 0 \\ (3) \Leftrightarrow \lambda = 2 \\ (4) \Leftrightarrow z = 1/2 \end{cases}$$

point candidat pour $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
Ici pas un compact mais bon candidat pour 1 min

6.5.3

$$\frac{d}{dc} \left(f(x_1^*(c), \dots, x_n^*(c)) \right) = \frac{dx_1^*(c)}{dc} \frac{df}{dx_1}(x^*(c)) + \dots + \frac{dx_n^*(c)}{dc} \frac{df}{dx_n}(x^*(c))$$

6.5.4

$$D^2 \psi = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 4.$$

↓ valeur propre et pas le multiplicateur plus haut

X^* est un point critique $d(\Psi)(x) = d\mathcal{L}(X, \lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*)$

$$d\Psi(X^*) = 0$$

$$D^2\Psi(X) = D^2\mathcal{L}(X, \lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*)$$

donc si $D^2\mathcal{L}(X, \lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*)$ est semi définie positive

$\Rightarrow \Psi$ est convexe

donc en X^* on a un min global de Ψ

$$\forall X \quad \Psi(X) \geq \Psi(X^*)$$

$$\mathcal{L}(X, \lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*) \geq \mathcal{L}(X^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*)$$

$$f(X) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* g_i(X) \geq f(X^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* g_i(X^*) \geq f(X^*)$$

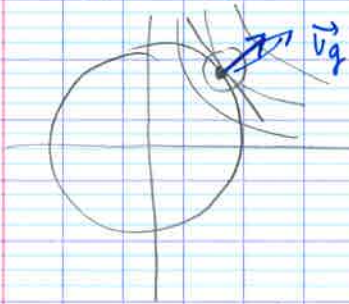
$\forall X$ admissible ($\forall i g_i(X) = 0$)

$$\text{or } f(X) \geq f(X^*)$$

En X^* on a un min global de f sous les contraintes

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

p73



direct^o admissibles: dir $\perp$ au gradient.

p74

Exemple:

$$\max x^2 + 4yz$$

$$\text{sc } x+y=1 \Leftrightarrow x+y-1=0$$

$$1 \text{ point candidat: } \lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$D^2\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 4$$

non définie mais pas forcément point selle

point selle de $\mathcal{L}$ si j'autorise toutes les directions
→ dépend des directions autorisées.

les contraintes impliquent qu'on n'a plus la m. de lecture:

Calcul des direct^o autorisées:

Jacobienne des contraintes:

$$Jg = (1 \ 1 \ 0) \quad \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$(1 \ 1 \ 0) (h_1 + h_2) = 0 \Leftrightarrow h_2 = -h_1$$

les directions admissibles sont

$$H \begin{pmatrix} h \\ -h \\ i \end{pmatrix}$$

pas un
complexe

pourquoi un
0 ?
et pas ds celui
du TD

$${}^t H \cdot D^2 \mathcal{L} \times H$$

$$\begin{pmatrix} h \\ -h \\ i \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2h \\ 4i \\ -4h \end{pmatrix}$$

$$(h \ -h \ i) [2h^2 - 4ih - 4ih]$$

→ forme quadratique n'est plus que de dim 2
2 paramètres

$${}^t H D^2 \mathcal{L} H = 2h^2 - 8ih$$

$$\begin{bmatrix} h & i \\ 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} h \\ i \end{matrix}$$

nature de cette forme quadratique :
Dét = -16 < 0 → non déf → point selle

$\lambda_1 \times \lambda_2 < 0$ → signes opposés

Les vp sont de signes opposés

${}^t H D^2 \mathcal{L} H$ non définie → $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$ pt selle

Méthode de Gauss

$$\begin{aligned} {}^t H D^2 \mathcal{L} H &= 2(h^2 - 4ih) \\ &= 2(h - 2i)^2 - 8i^2 \rightarrow \text{non déf} \end{aligned}$$

$\uparrow$ $\oplus$ $\uparrow$ $\ominus$

on retrouve la m conclusion

Exemple p 75

$$\max_{sc} x^2 + 4yz$$

$$x+y+z=1$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice Hessienne bordée

$$H = \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^t B & A \end{bmatrix}$$

$n = 3$: dim M du début.

$p = 1$: contrainte

$n - p = 2$ → on doit calculer les deux derniers mineurs diagonaux principaux.

$$\det H = -4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16.$$

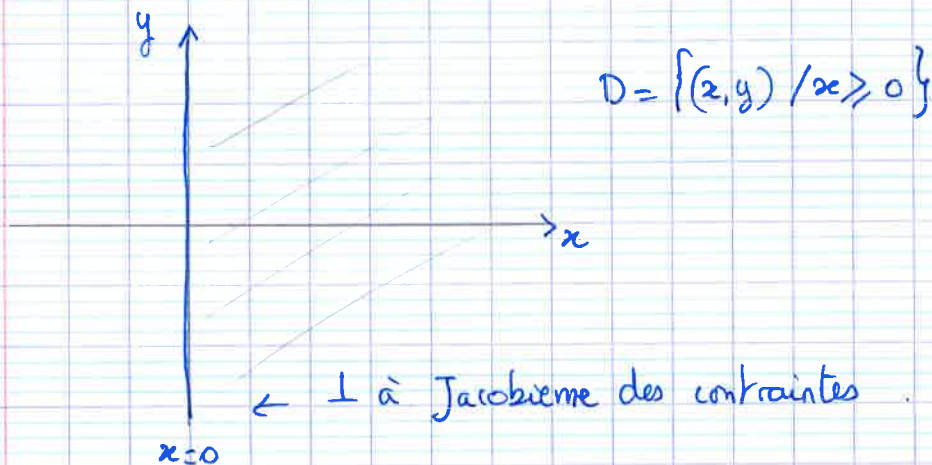
ni proposition 1 : ni du signe de $(-1)^m = (-1)^3 = -1 < 0$

ni proposition 2 : ni du signe de $(-1)^p = (-1)^1 = -1 < 0$

$\Rightarrow$ c'est un point selle.

f n'admet ni max, ni min, ni globaux, ni locaux

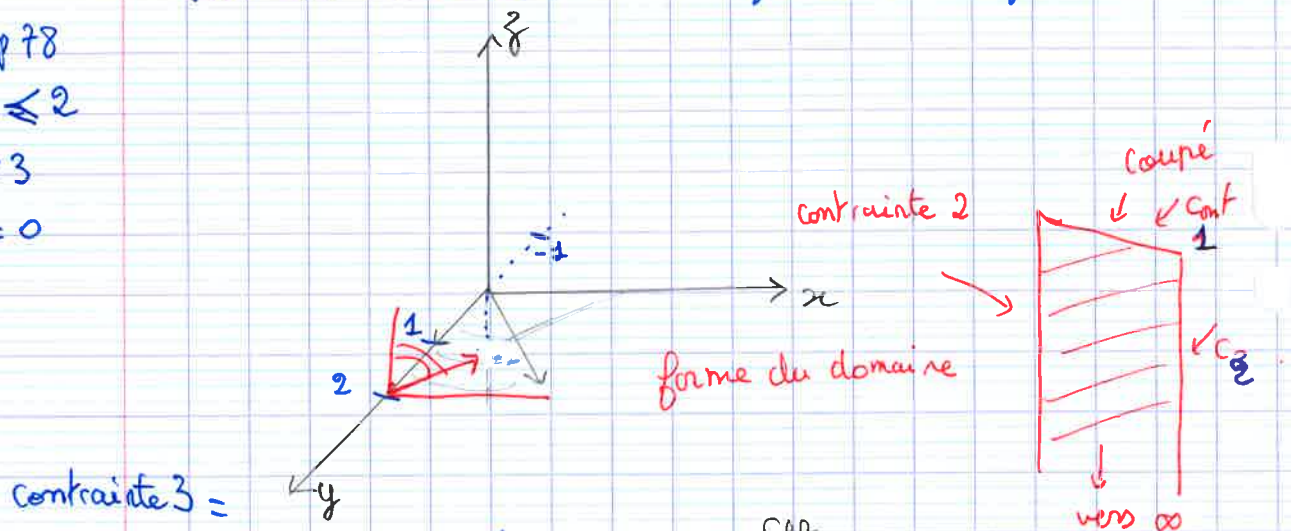
Notre ens. n'est pas un compact, sinon il y aurait un max et un min.



tan aux contraintes = $\perp$ au gradient des f 's

Exemple p 78

$$\begin{array}{l} 1 \quad x+y \leq 2 \\ 2 \quad x^2 \leq 3 \\ 3 \quad x+y=0 \end{array}$$



$$\begin{aligned} (x+y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=-x \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} = 0$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

contrainte 2:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$x + y = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{vecteur orthogonal à } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = 2 - x \\ z = z \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\geq f(x^*)$ on a un min global
les contraintes : $\begin{bmatrix} \lambda x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1) On veut le demi plan derrière le plan rouge dans le plan blanc.

→ 4 types de points :

① points à l'intérieur du domaine :

(1)

$$\begin{cases} x + y < 2 \\ x^2 < 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$Jg = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ de rang 1 ok}$$

Jacobienne des contraintes saturées.

(1) et (3)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 < 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$Jg = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det = -1 \neq 0$ de rang 2 ok!

(2) et (3)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 = 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$Jg = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x \neq 0 \text{ car } x^2 = 3 \text{ de rang 2 ok}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x+y=2 \\ x^2=3 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$$J_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x \neq 0 \text{ car } x^2 = 3$$

de rang 3 ok.

p 78

Exemple

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+y+z \leq 0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ cylindre

↑ que le bord
(peut être coupé en trois).



$$J_g = (2x \quad 2y \quad 0)$$

de rang 1 sauf si $x=y=0$

or $(0,0,z)$ n'est pas admissible

$$\textcircled{2} \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$J_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x \neq 0 \text{ sauf si } x=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -2y \neq 0 \text{ sauf si } y=0$$

Seuls les points $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont tels que $\text{Rang } J_g \leq 2$
 Or ces points ne vérifient pas $x^2 + y^2 = 4$
 Conclusion: les contraintes sont partout qualifiées.

p79

6.8

Pour $\min_{x \in D} f(x)$ Il suffit de $\max_{x \in D} [-f(x)]$

$$\text{Arg Min}_{x \in D} f = \text{Arg Max}_{x \in D} f$$

$$\min_{x \in D} f(x) = -\max_{x \in D} -f(x)$$

p80

Exemple:

$$\begin{array}{ll} \max & x+y \\ \text{sc} & y + \frac{x^3}{3} = 0 \end{array}$$

qualificat° des contraintes :

$$J_g = \begin{bmatrix} x^2 & 1 \\ \uparrow & \end{bmatrix} \text{ de rang } 1$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x + y - \lambda \left(y + \frac{x^3}{3} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{L}}{dx} = 1 - \lambda x^2 \\ \frac{d\mathcal{L}}{dy} = 1 - \lambda = 0 \\ y + \frac{x^3}{3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ \lambda = 1 \\ y = -\frac{x^3}{3} \end{cases}$$

Les points critiques sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ pour $\lambda = 1$

CS2 $D^2\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -2\lambda x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Si Valeur propre 0 crée une direction admissible :
on est obligé de faire la méthode des directions :

$\lambda = 1 \quad D^2\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (Méthode direction)

$Jg = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$
 $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$

Directions admissibles $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2h \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} h & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2h^2 \end{pmatrix}$

${}^t H D^2\mathcal{L} H = -2h^2$ définie négative

En $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$, la fonction admet un max local qui vaut $\frac{2}{3}$

• Seu le 2^e pt on peut faire la m^e méthode mais on peut faire une autre méthode :

Pour $\lambda = 1$
 $D^2\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Au voisinage de $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, la première vp est $-2x > 0$ et la seconde est 0

La matrice $D^2\mathcal{L}$ est au voisinage de $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ semi définie positive donc $\mathcal{L}$ est localement convexe

⇒ En $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ on a un Min local qui vaut $-\frac{2}{3}$

Autre méthode : Hessien Bordé

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \text{nb de Dables } 2 \\ \nearrow \text{nb de contraintes } 2 \end{matrix}$$

$n = 2 \quad p = 1$

$$\text{Det } H = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{du signe de } (-1)^n > 0$$

donc définie négative

donc En $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ on a un max local.

Remarque :

$$\text{Max}_{x,y} x+y = \text{Max}_x x - \frac{x^3}{3}$$

$$\text{sc } y + \frac{x^3}{3} = 0$$

↑ Cette fonctⁿ n'admet clairement ni min ni max.

$$\bullet \quad \text{Min}_{xy} -xy = \text{Min}_{x,y} -xy$$

$$\text{sc } 1-x^2-y^2 \geq 0$$

$$\text{sc } x^2+y^2-1 \leq 0$$

$$= -\text{Max}_{x,y} xy \quad \text{sc } x^2+y^2-1 \leq 0$$

Qualification : si $x^2+y^2 < 1$ Jg de rang Max...

$$\text{si } x^2+y^2-1 \quad Jg = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

de rang 1 sauf si $x=y=0$, or $x^2+y^2=1$ donc tjs de rang 1
Les contraintes sont partout qualifiées.

$$\mathcal{L}(x,y,\mu) = -xy - \mu(x^2+y^2-1)$$

$$\text{CN1: } \begin{cases} \frac{d\mathcal{L}}{dx} = y - 2\mu x = 0 \quad (1) \\ \frac{d\mathcal{L}}{dy} = x - 2\mu y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\mu \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu(x^2+y^2-1) = 0 \quad (3) \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \quad (4) \end{array} \right.$$

→ car maximise ou minimise

$$② \Rightarrow \mu = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } \mu = 0 \quad \text{le système devient : } \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ -1 \leq 0 \end{cases}$$

1^{er} point candidat $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $\mu = 0$

$$2^{\text{e}} \text{ cas : } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4\mu x \\ y = 2\mu x \\ x = 2\mu y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 4\mu^2 y \\ x = 2\mu y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (1 - 4\mu^2)y = 0 \\ x = 2\mu y \end{cases}$$

1^{er} sous cas : $y = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x^2 + y^2 = 1$ impossible

$$2^{\text{e}} \text{ sous cas : } \mu = \frac{1}{2} \quad (3) \Rightarrow x = y \\ (1') \Rightarrow 2x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2 points candidats $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ pour $\mu = 1/2$

Conclusion : on a 3 pts candidats :

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $\mu = 0$

$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ pour $\mu = 1/2$

$$D^2_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} -2\mu & 1 \\ 1 & -2\mu \end{bmatrix}$$

$$\text{En } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } \mu = 0 \quad D^2_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ non dif.}$$

Toutes les directions sont admissibles donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point selle.

Pour les autres points, $\mu = 1/2$

$$\forall X, D^2_{\mathcal{L}}(\mu = 1/2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \det = 0 \\ \text{Trace} = -2 \end{matrix}$$

Donc $\forall X$ D^2f est semi définie négative

L est globalement concave.

Aux points associés à $\mu = 1/2$ ^{cad} ie $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

On a un Max global qui vaut $\frac{1}{2}$

$(-xy)$ admet.

en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un pt selle

→ pourquoi ? car compact ?

la contrainte est un

en $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ un Min global qui vaut $-\frac{1}{2}$

Sous la contrainte $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$

Les direct^s sont de descente ça marche bien

ex: Thafay. free. fr
mot de passe Cauchy

chapitre 7

Nombres complexes

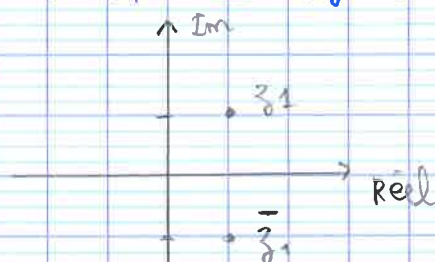
Exemple p 82 :

$$z^2 - 3z + 4 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 9 - 16 = -7 = i^2 7$$

$$z_1 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2} \quad z_2 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow (1) = 1 \times \left(z - \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}\right) \left(z - \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}\right)$$



$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

module

$$\rightarrow |x| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

↙ valeur absolue

p 82 $z\bar{z} = |z|^2$

Preuve: $z = x + iy$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$$

$$= x^2 - (iy)^2$$

$$= x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Exemple:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1+3i}{1-i} + i \Rightarrow z = \frac{(1+3i)(1+i)}{1-i^2} + i \\
 &= \frac{1+i+3i+3i^2}{2} = \frac{1+4i+3i^2}{2} + i = \frac{-2+4i}{2} + i \\
 &= -1+3i \\
 \operatorname{Re}(z) &= -1 \quad \operatorname{Im}(z) = 3
 \end{aligned}$$

Supposons $z = x+iy$ $\bar{z} = x-iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$x+iy = 1+i-2i(x-iy) + \frac{i(1+i)}{2}$$

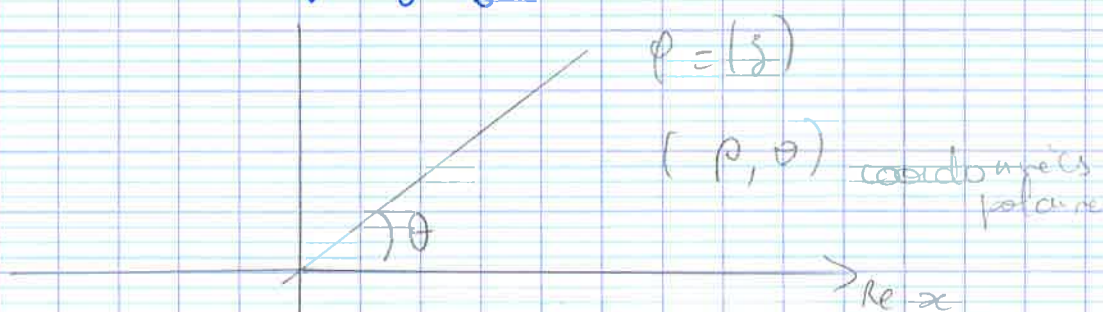
$$x+iy = \frac{1}{2} + \frac{3i}{2} - 2ix - 2y$$

On identifie partie réelle puis partie imaginaire

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - 2y \\ y = \frac{3}{2} - 2x \end{cases}
 \quad
 \begin{cases} x = \frac{1}{2} - 2y \\ y = \frac{3}{2} - 1 + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - 2y \\ -\frac{1}{2} = 3y \end{cases}
 \quad
 \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Conclusion: $z = \frac{5}{6} - \frac{i}{6}$



$$\alpha \in [0, 2\pi]$$



$$\cos \alpha = \frac{\text{côté adj}}{\text{hyp}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opp}}{\text{hyp}}$$

$$\text{Propriété } \cos \alpha \in [-1; 1]$$

$$\sin \alpha \in [-1; 1]$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opp}}{\text{côté adj}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Th pythagore

$$(\text{adj})^2 + (\text{opp})^2 = (\text{hyp})^2$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Sur le C de rayon 1 centré en 0

$$\cos \alpha = \text{Re}(z)$$

$$\sin \alpha = \text{Im}(z)$$

$$\cos 0 = 1 \quad \sin 0 = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Pour $\frac{\pi}{4}$ on est sur la 1^{ère} bissectrice donc $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$$

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ car ça doit \u00eatre positif}$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$
$\cos \alpha$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$
$\sin \alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

$\cos x$ est paire $\cos x = \cos(-x)$

$\sin x$ est impaire $\sin(-x) = -\sin x$

$\tan(-x) = -\tan x$ $\tan$ est impaire

l'étude suffit sur $[0; \pi]$ pour les fct^o trigo

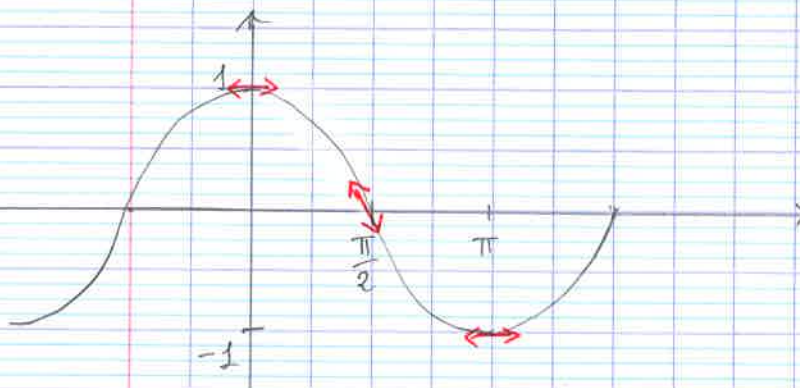
Etude de $\cos x$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_f = [0, \pi]$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

	0		π
$f'(x) = -\sin x$	0	-	0
$f(x) = \cos x$	1	$\searrow$	-1



$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$



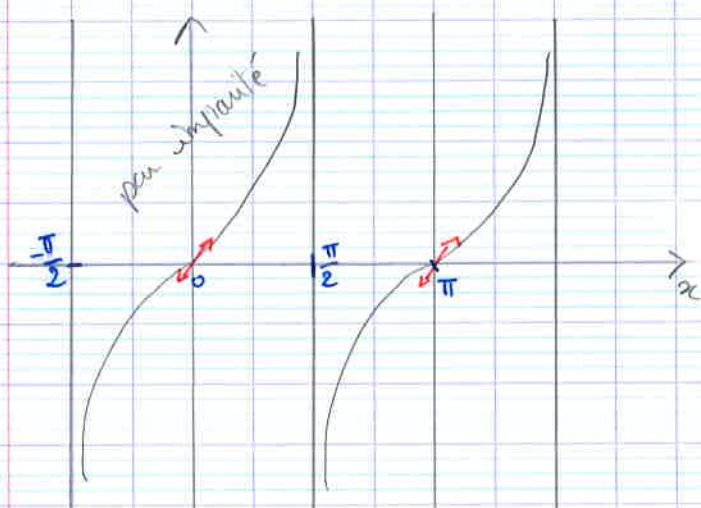
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\tan 0 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$(\tan x)'(0) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\tan \pi = 0$$



$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho}$$

$$x = \rho \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{\rho}$$

$$y = \rho \sin \alpha$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho (\cos \alpha + i \sin \alpha) = x + iy$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{\rho}$$

ρ est appelé argument du complexe

$$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

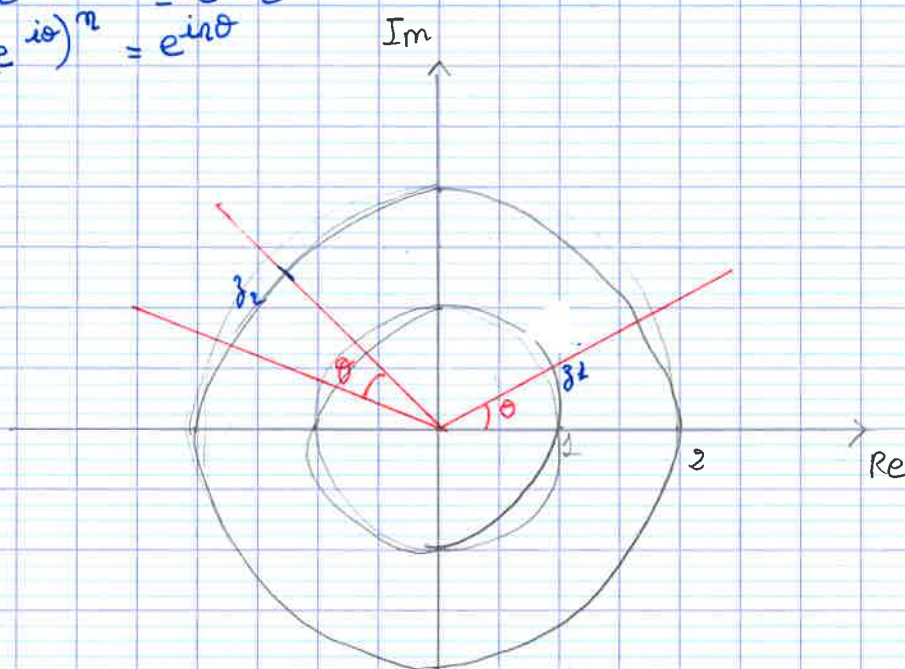
coordonnées polaires $\rho = 2$ $\theta = \frac{\pi}{4} (2\pi)$

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

on pose : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} e^{i\varphi}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$



Où est $z_1 z_2$?

$$\frac{z_2}{z_1} ?$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 2 \text{ sur le cercle de rayon } 2$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$$

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \frac{\cos\theta + i\sin\theta + (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))}{2i} \\ &= \frac{\cos\theta - \cos\theta + i\sin\theta + i\sin\theta}{2i} \\ &= \frac{2i\sin\theta}{2i} = \sin\theta\end{aligned}$$

Formule d'Euler:

$$\begin{aligned}\star \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{\cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)}{2} \\ &= \frac{2\cos\theta + i\sin\theta - i\sin\theta}{2} \\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

1^{re} méthode : $z = x + iy$
 $\bar{z} = x - iy$

$$\begin{aligned}(x + iy)^2 &= x - iy \Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = x - iy \\ \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases} &\quad \begin{cases} x^2 - y^2 = x \quad (1) \\ y(2x + 1) = 0 \quad (2) \end{cases}\end{aligned}$$

1^{er} cas : $y = 0$

(1) $\Rightarrow x^2 = x$ donc $x = 0$ ou $x = 1$

$0 = 0 + i0$ ou $1 = 1 + i0$

2^e cas : $x = -\frac{1}{2}$

(1) $\Rightarrow \frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

On a 4 solutions $0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-2i\frac{\pi}{3}} = e^{4i\frac{\pi}{3}}$

2^e méthode $z^2 = \bar{z}$

$$z = \rho e^{i\theta} \quad \bar{z} = \rho e^{-i\theta}$$

$$z^2 = (\rho e^{i\theta})^2 = \rho^2 e^{2i\theta} = \rho e^{-i\theta}$$

$$\rho^2 e^{2i\theta} = \rho e^{-i\theta} \quad \text{en égalisant module et arg.}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho \\ 2\theta \equiv -\theta [2\pi] \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 = \rho \\ 3\theta \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

1^{er} cas $\rho = 0 \rightarrow 1$ solution : 0

2^e cas $\rho = 1$

$$3\theta \equiv 0 [2\pi] \Leftrightarrow 3\theta = 0 + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3} \right] \Leftrightarrow \theta = 0 + \frac{2\pi k}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{i\theta} = 1; e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$e^{4i\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

les solutions sont : 0, 1, $e^{2i\pi/3}$, $e^{4i\pi/3}$

1^{ère} méthode : $z = x + iy$

$$(x + iy)^3 = x - iy$$

$$x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x - iy$$

$$x^3 - 3xy^2 + 3x^2yi - iy^3 = x - iy$$

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x \\ 3x^2y - y^3 = -y \end{cases} \quad \triangle \text{ compliqué}$$

2^e méthode : $z = \rho e^{i\theta}$

$$(\rho e^{i\theta})^3 = \rho e^{-i\theta}$$

$$\rho^3 e^{3i\theta} = \rho e^{-i\theta}$$

$$\rho^3 = \rho$$

$$3\theta \equiv -\theta [2\pi]$$

1^{er} cas $\rho = 0$

2^e cas $\rho = 1$

$$4\theta \equiv 0 [2\pi]$$

$$\theta \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

les solut^s sont 0, $1e^{i0}$, $1e^{i\pi/2}$, $1e^{i\pi}$, $1e^{i3\pi/2}$

$$S = \{0, 1, i, -1, -i\}$$

$$z^n = r e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \rho^n e^{ni\theta} = r e^{i\alpha}$$

Gabri

P84 Exemple : Cherchez les racines 3^e de 8 :
 les Racines 2^e de 4 $\rightarrow$ sont 2 et -2

Preuve $2^2 = 4$

$$(-2)^2 = 4$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 = 8^{1/3}$$

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ une racine 3^e de 8

$$\rho^3 e^{3i\theta} = 8 = 8e^{i0}$$

$$\begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = 0 [2\pi] \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = 0 [2\pi/3] \end{cases}$$

$$2e^{i0}; 2e^{2i\pi/3}; 2e^{4i\pi/3}$$

$$z_1 = 2$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \left\{ \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= -1 - i\sqrt{3}$$



$\sqrt[3]{-8} = -2$ se définit car $\exists$ une racine réelle mais $\sqrt{-2}$ ne se définit pas.

mais $(-8)^{1/3} \sim -2$
 $\nearrow$
 pas égal

X

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

$$P(z) = \alpha_n X^n + \dots + \alpha_0 \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

tous les polynômes réels ne sont pas factorisables dans $\mathbb{R}$

Exemple $P(X) = X^2 + X + 1$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$P(X) \neq (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

Par contre dans $\mathbb{C}$: tous les polynômes à coefficients complexes sont factorisables

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i) \quad \text{avec } \lambda_i \text{ complexe.}$$

Supposons que l'on cherche les racines du complexe $\alpha + i\beta$

Méthode 1 : $z = x + iy$ tq $z^2 = \alpha + i\beta$

$$(x + iy)^2 = \alpha + i\beta$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta$$

$$\begin{cases} 2xy = \beta \\ x^2 - y^2 = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy = \beta \\ x^2 - y^2 = \alpha \end{cases}$$

Méthode 2

$$\Delta = \alpha + i\beta = \rho e^{i\theta}$$

z l'une des racines est alors $z = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$ $(\rho e^{i\theta})^2 = \rho e^{i\theta}$

$$P(z) = z^2 - (1+3i)z + 2i - 2 = 0$$

$$\Delta = (1+3i)^2 - 4(2i-2)$$

$$= 1^2 + (3i)^2 + 6i - 8i + 8$$

$$= 1 - 9 - 2i + 8$$

$$= -2i$$

$$2 = (-i)$$

$$= 2e^{-i\pi/2}$$

Notons δ l'une des racines de Δ

$$\delta = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

$$\delta = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i \text{ ("}\sqrt{\Delta}\text{")}$$

$$\begin{cases} r^2 = \rho \\ 2\varphi = \theta (2\pi) \\ r = \sqrt{\rho} \\ \varphi = \frac{\theta}{2} [\pi] \end{cases}$$

$$\arg(z^{1/2}) = \frac{1}{2} \arg z$$

$$z_1 = \frac{1+3i-(1-i)}{2} = 2i$$

$$z_2 = \frac{1+3i+1-i}{2} = 1+i$$

$$P(z) = 1z^2 - (1+3i)z + 2i - 2$$

$$= 1(z-2i)(z-1-i)$$

$$i^2 = -1 \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$e^{-ia} = \cos(-a) + i\sin(-a)$$

$$= \frac{1}{e^{ia}} = \frac{1}{\cos a + i\sin a} = \cos a - i\sin a$$

$$= \frac{\cos a - i\sin a}{(\cos a + i\sin a)(\cos a - i\sin a)}$$

$$\cos(-a) = \cos a$$

$$\sin(-a) = -\sin a$$

$$e^{i(a+\pi/2)} = e^{ia} e^{i\pi/2}$$

$$= (\cos a + i\sin a) i$$

$$= -\sin a + i\cos a$$

$$= \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a$$

$$\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a$$

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

$$= e^{ia} e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$$

$$= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b)$$

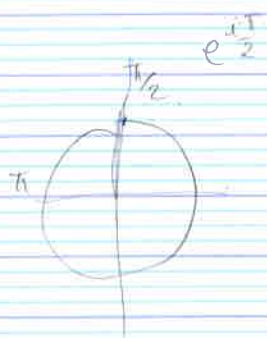
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

$$\Rightarrow \sin(2a) = 2\cos a$$

$$P(z) = \frac{1}{4}z^2 + (1+\sqrt{3}i)z + 1-\sqrt{3}i$$

$$\Delta = (1+\sqrt{3}i)^2 - \frac{4}{4}(1-\sqrt{3}i)$$



$$= 1 - 3 + 2\sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i$$

$$= -3 + 3\sqrt{3}i$$

$$|\Delta| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$$

$$\Delta = -3 + 3\sqrt{3}i$$

$$= 6 \left(-\frac{3}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{6}i \right)$$

$$= 6 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 6 e^{2i\pi/3}$$

$$S = \sqrt{6} e^{i\pi/3} = \sqrt{6} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \sqrt{6} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3} - \sqrt{6}/2 + 3i\sqrt{2}/2}{\frac{1}{2}}$$

$$z_1 = -2 - 2i\sqrt{3} - \sqrt{6} + 3i\sqrt{2}$$

$$z_1 = -2 - \sqrt{6} + i(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$$

$$z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3} + \sqrt{6}/2 + 3i\sqrt{2}/2}{1/2}$$

$$z_2 = -2 + \sqrt{6} + i(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 1$$

$$z_3 = \frac{1}{2} \left(-1 + 2^{1/4} \cos \frac{3\pi}{8} \right) + \frac{i}{2} \left(1 + 2^{1/4} \sin \frac{3\pi}{8} \right)$$

$$z_4 = \frac{1}{2} \left(-1 - 2^{1/4} \cos \frac{3\pi}{8} \right) + \frac{i}{2} \left(1 - 2^{1/4} \sin \frac{3\pi}{8} \right)$$

p86

$$e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} = e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

$$= \left(\cos \frac{a+b}{2} + i \sin \frac{a+b}{2} \right) \left(\cos \frac{a-b}{2} + i \sin \frac{a-b}{2} \right)$$

En identifiant la partie réelle

$$\cos a = \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \quad \forall b$$

$$\cos b = \cos \frac{b+a}{2} \cos \frac{b-a}{2} - \sin \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2}$$

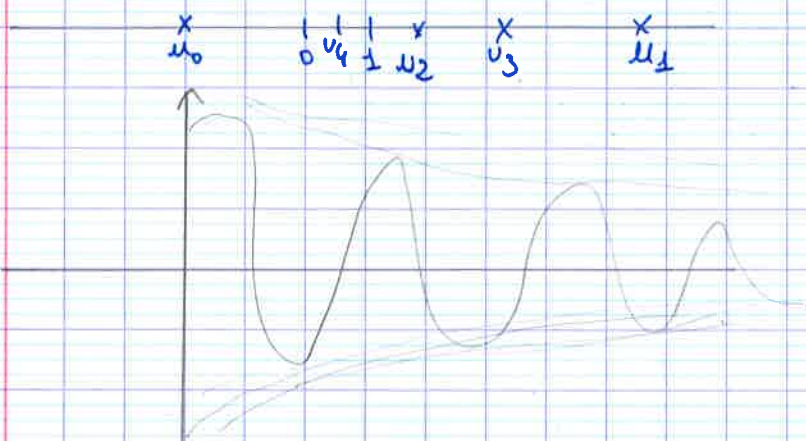
$$\text{En sommant } \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{b-a}{2}$$

chapitre 8

Les suites

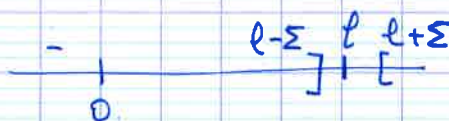
$$u_n = \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow u_n \in \mathbb{R}$$



$$u_{n+1} = f(u_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{ssi}$$



$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \{u_n / n \geq N\}$$

$$u_n \text{ diverge vers } +\infty \text{ ssi}$$

$$\forall \eta > 0 \exists N \text{ t.q. } \{u_n / n < \eta\}$$

$(-1)^n$ ne converge pas

u_{2n+1}
 u_3
 u_1

-1

0

u_n
 u_{2n}
 u_0

1

$\sum c_i$ on ne pt inclure ds 1 intervalle et 1 et -1

Example : $u_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n!}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

$$n \geq 2 \quad n+1 \geq 3$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3} < 1$$

Donc $u_n \rightarrow 0$
 $n \rightarrow \infty$

Example p88 $u_n = \frac{2^n}{n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{n! (n+1)^{n+1}}{(n+1)! 2^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1) 2^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{2^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k}$$

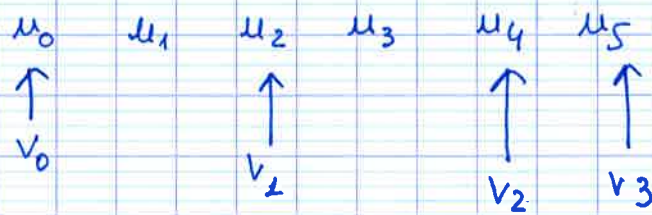
Supposons $n \geq 1$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k}$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k} > \frac{2}{5} > 1$$

la suite est divergente vers $+\infty$
 Par exemple



v_n est extraite de u_n

exercice

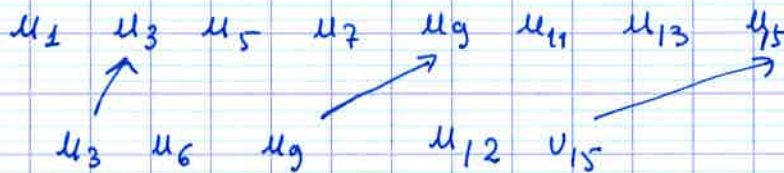
p 88

2) Mg si $u_{2n} \rightarrow u_{2n+1}$ et u_{3n} convergent alors u_n converge.
 $(-1)^n$

Supposons $u_{2n} \rightarrow l_1$

$u_{2n+1} \rightarrow l_2$

$u_{3n} \rightarrow l_3$



Si u_{2n} converge vers l_1 $u_{2(3n)} = u_{6n}$ converge vers l_1

Si u_{3n} l_3 $u_{3(2n)} = u_{6n}$ converge vers l_3
 donc $l_1 = l_3$

u_{6n+3}

$u_{2(3n+1)+1} = u_{6n+3} \rightarrow l_2$

$u_{3(2n+1)} = u_{6n+3} \rightarrow l_3$

donc $l_2 = l_3$

Conclusion $l_1 = l_2$ d'après l'exo 1 u_n converge vers cette limite comme aux 3 suites.

Une suite de Cauchy est une suite dont le pas
($|u_i - u_j|$) tend vers 0 quand, $i, j \geq N$
 N atteint vers $+\infty$

Preuve Propriété

Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$

$$i \geq N \Rightarrow |u_i - l| \leq \varepsilon/2$$

$$j \geq N \Rightarrow |u_j - l| \leq \varepsilon/2$$

$$\begin{aligned} |u_i - u_j| &= |u_i - l + l - u_j| \\ &\leq |u_i - l| + |l - u_j| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

donc la suite convergente est de Cauchy.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$|u_n - 1| = \left| \frac{n+2}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{On veut } \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \quad \frac{1}{\varepsilon} \leq n+1$$

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \text{Si } n \geq E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$$

Conclusion : Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - 1| \leq \varepsilon \quad \text{donc effectivement } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

$u_n = f(n)$
 $u_{n+1} = f(u_n)$

Supposons f croissante

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Supposons $u_0 \leq u_1$ et montrons par récurrence que

$$\forall n, u_n \leq u_{n+1}$$

$$n=0 \quad u_0 \leq u_1$$

$$n \mapsto n+1 \quad u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \quad \text{QED!}$$

De m si $u_1 \leq u_0$ on peut montrer par récurrence que $\forall n, u_{n+1} \leq u_n$ (suite décroissante)

f croissante $\Rightarrow u_n$ monotone

(le signe de $u_1 - u_0$ indique si u_n croissante (>0)

ou u_n décroissante (<0)

$$\forall n, u_{2n}$$

$$\forall n+1 = u_{2(n+1)} = u_{(2n+1)+1} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}))$$

La suite u_{2n} est une suite récurrente définie par $f \circ f$.

Supposons $f \in C^1$ et f décroissante

$$(f \circ f)'(x) = f'(x) \times f'(f(x))$$

$$\underbrace{\begin{matrix} (+) & (+) \\ (+) \end{matrix}}$$

$\rightarrow f \circ f$ croissante

$\rightarrow$ donc u_{2n} monotone puisque $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$

Remarque la démo est la m pour u_{2n+1}

Supposons $u_n \rightarrow l$

u_{n+1} est une suite extraite de u_n donc elle converge vers l

$u_{n+1} = f(u_n)$ si f continue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$$

Conclusion $l = f(l)$

$$\begin{matrix} (f \circ f)' \\ f' \circ f' \end{matrix}$$

Supposons $u_0 \neq 0$

$x=0$ u_0 et ensuite 0

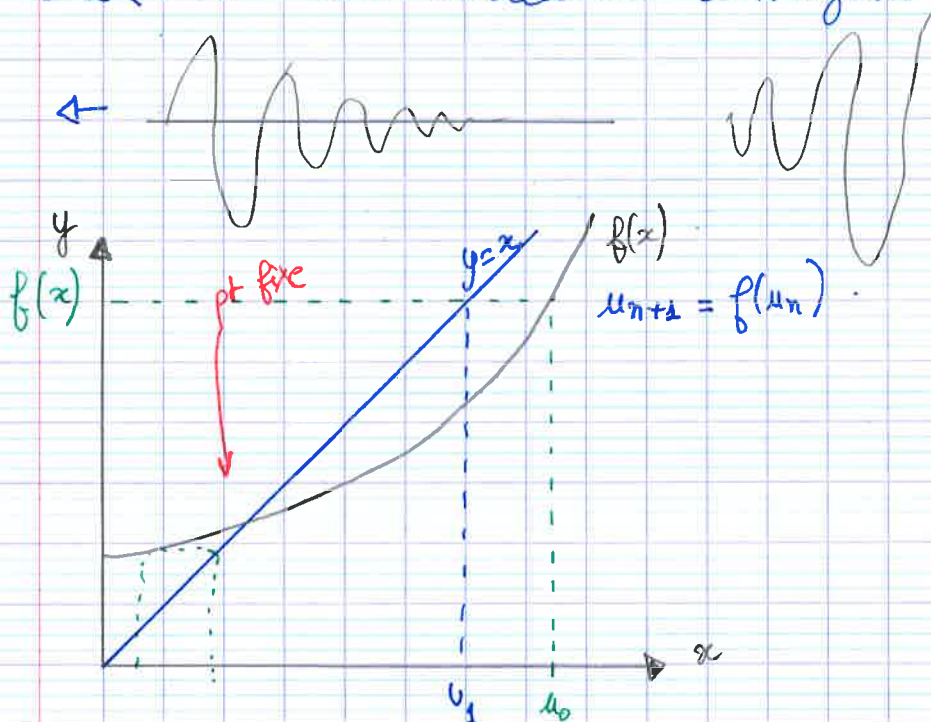
$0 < x < 1$ (si $u_0 > 0$) u_n décroissante minorée par 0
(si $u_0 < 0$) u_n croissante majorée par 0
elle converge vers 0.

$x=1$ suite constante $\pm u_0$

$x > 1$ Si $u_0 > 0$ (u_n) croissante divergente vers $+\infty$

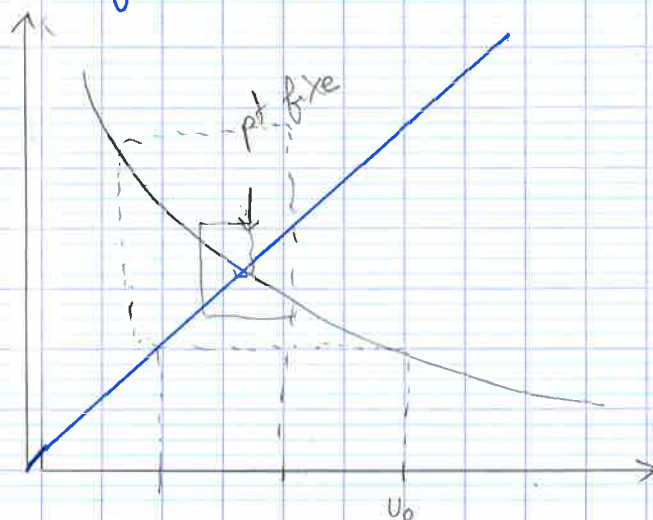
Si $u_0 < 0$ (u_n) décroissante divergente vers $-\infty$

$-2 < x < 0$ Suite oscillatoire convergente vers 0



Suite croissante qui converge vers le pt fixe.

Cas fonction décroissante



p91

$$u_{n+1} \geq 0$$

Exercice 1 : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n + 2}$

Intro $\rightarrow u_n$ est bien définiSupposons $u_0 > 0$ et montrons $\forall n, u_n \geq 0$.

Par récurrence

$n=0$ $u_0 > 0 \geq 0$ ok

au rang $n+1$: $u_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2 + u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 2}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n + 2} \geq 0 \text{ car signe de } a$$

$$u_n \geq 0 \text{ QED!}$$

1) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+2) - (x^2+x+1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 5x + 2 - x^2 - x - 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$$

$$\Delta = 16 - 4 = 12 \quad x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} < 0$$

$$x_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2} < 0$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow u_n \text{ monotone}$$

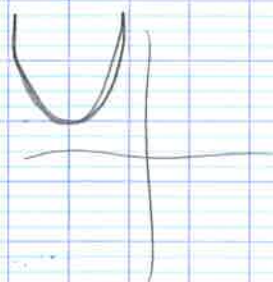
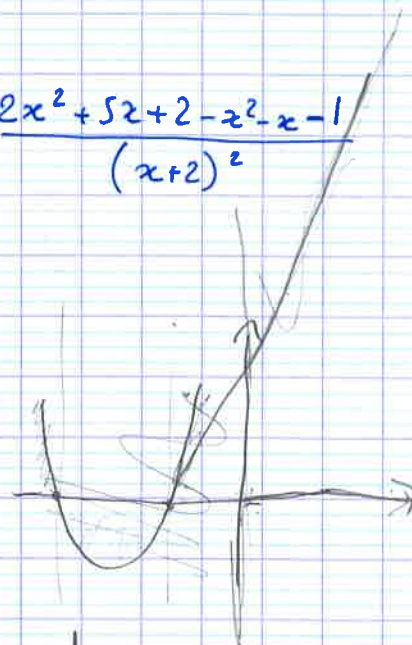
2) $f(x) = x \quad \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} = x$

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x = 1$$

$l=1$

3) $f(x) - x = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} - x = \frac{1}{x + 2} (x^2 + x + 1 - x^2 - 2x)$

$$= \frac{1}{x + 2} (1 - x)$$

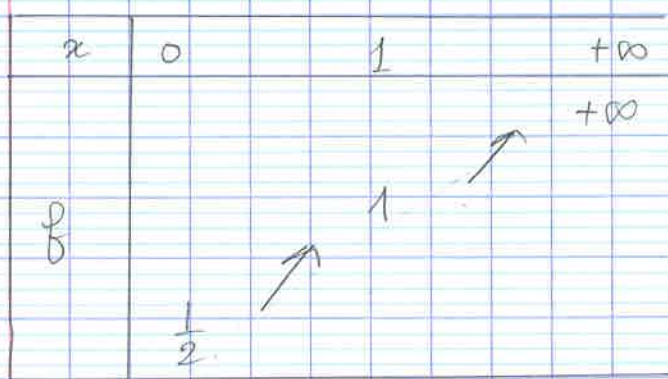


Donc si $u_0 > 1$

$f(u_0) - u_0 \leq 0$ donc u_n décroissante.

Si $0 < u_0 < 1$

$f(u_0) - u_0 \geq 0$ donc u_n est croissante majorée par 1.
donc u_n converge vers 1



Soit $x > 1$

$$f([0, x]) \subset [\frac{1}{2}, f(x)] \\ \subset [0, x]$$

Soit $u_0 > 0$

Prenons $x > u_0$ et $x > 1$

Prenons $I = [0, x]$ c'est un intervalle stable

$$f(I) \subset I$$

$$|f'(x)| = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 4x + 4} < 1 \text{ sur } [0, x]$$

$|f'(x)|$ atteint son Max

$$\Rightarrow \exists M \quad |f'(x)| \leq M < 1$$

D'après le th de convergence

u_n converge vers un pt fixe de I

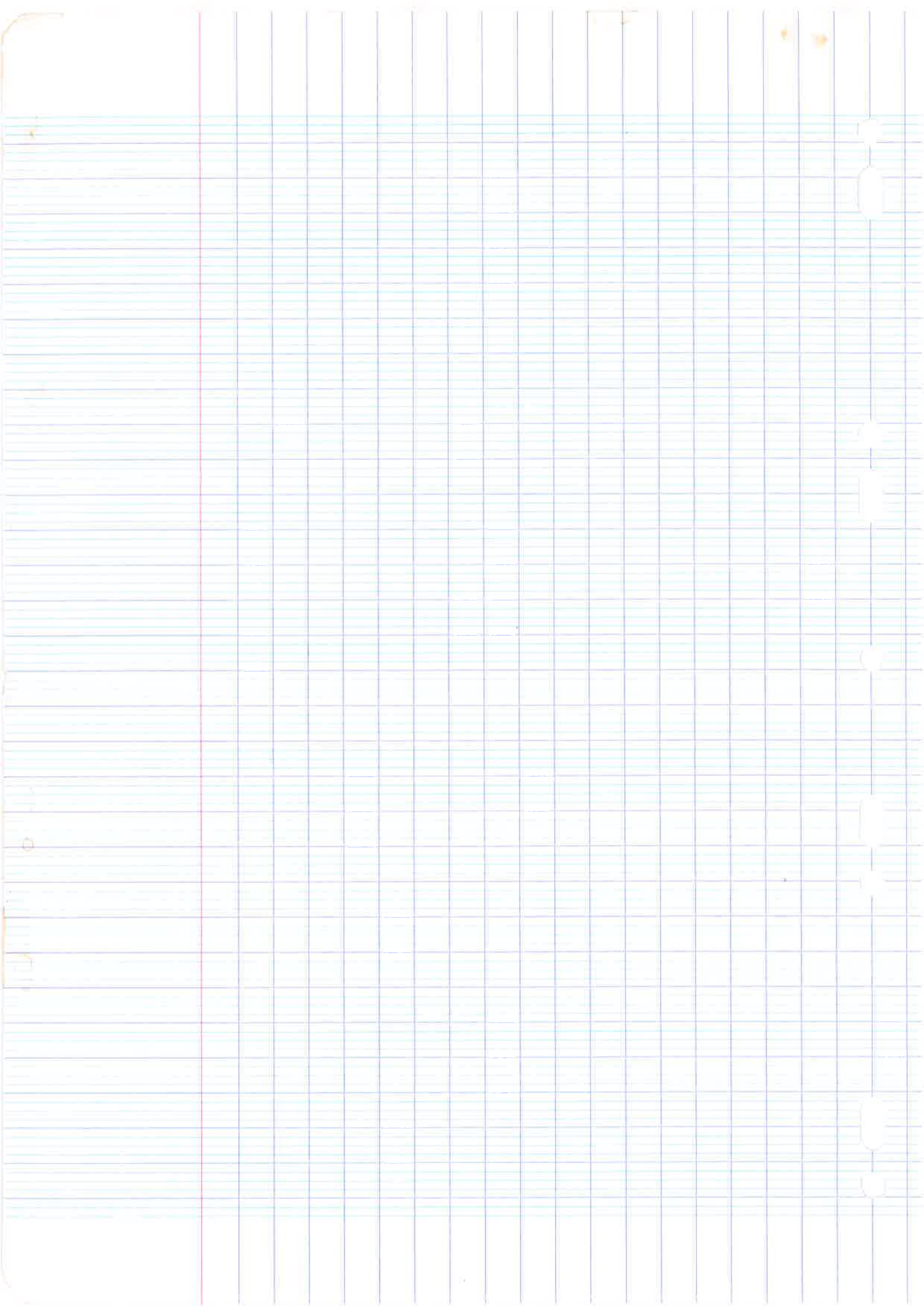
$\Rightarrow u_n$ converge vers $l=1$

$l=1$

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n + 2}$$

Supposons $u_0 > -2$ $u_1 = \frac{u_0^2 + u_0 + 1}{u_0 + 2} > 0$ $\Delta = 1 - 4 = -3$

On est donc ramené au pbm précédent et la suite converge



chap. 9

Les équations de récurrence

9.1 n années

$$\text{PNB}(n+k) = f(\text{PNB}(n+k-1), \dots, \text{PNB}(n)) + h(n)$$

$$\Leftrightarrow a_0 \text{PNB}(n+k) + \dots + a_k \text{PNB}(n) = h(n)$$

Trouver la fonction f tel que:

$$\text{PNB}(n) = f(n)$$

$$\text{PNB}(0)$$

$$\text{PNB}(1)$$

$$\text{PNB}(k-1)$$

$$X_{n+2} + X_{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow X_{p+1} + X_p = 0$$

P93

Preuve de la proposition:

Soit X_n^* solution particulière de l'équation générale $\forall Z_n$ solution de l'équation générale $Z_n = X_n^* + Y_n$ où Y_n est solution de l'équation homogène et réciproquement. $(\forall Y_n$ solution de l'équation homogène, $Z_n = X_n^* + Y_n$ est solution de l'équation générale avec second membre)

← Montrons (2)

 $Z_n = X_n^* + Y_n$ avec Y_n solution de l'équation homogène.

$$\begin{aligned} & a_0 Z_{n+k}, \dots, a_k Z_n \\ &= a_0 (X_{n+k}^* + Y_{n+k}) + \dots + a_k (X_n^* + Y_n) \\ &= \underbrace{(a_0 X_{n+k}^* + \dots + a_k X_n^*)}_{h(n)} + \underbrace{(a_0 Y_{n+k} + \dots + a_k Y_n)}_0 \\ &= \end{aligned}$$

$$= h(n) \quad \text{QED.}$$

(1) Soit z_n solution de l'équation générale

Poseons $y_n = z_n - x_n^*$

$$\begin{aligned} & a_0 y_{n+k} + \dots + a_k y_n \\ &= a_0 (z_{n+k} - x_{n+k}^*) + \dots + a_k (z_n - x_n^*) \\ &= \underbrace{(a_0 z_{n+k} + \dots + a_k z_n)}_{h(n)} - \underbrace{(a_0 x_{n+k}^* + \dots + a_k x_n^*)}_{h(n)} \\ &= 0 \quad \text{QED} \end{aligned}$$

9.2 Equation Homogène

a_k et a_0 différents de 0 pour dire qu'elle est d'ordre k

9.2.1 :

Soit Ω : Ensemble des solutions de

$$a_0 y_{n+k} + \dots + a_k y_n = 0$$

Soient u_n et v_n deux éléments de Ω

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Montrons que $\alpha u_n + \beta v_n \in \Omega$

$$\begin{aligned} & a_0 (\alpha u_{n+k} + \beta v_{n+k}) + \dots + a_k (\alpha u_n + \beta v_n) \\ &= \alpha (a_0 u_{n+k} + \dots + a_k u_n) + \beta (a_0 v_{n+k} + \dots + a_k v_n) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Ω est un ssev de l'ensemble des suites réelles $\forall n$

$$a_0 y_{n+k} + \dots + a_k y_n = 0$$

La suite est définie entièrement en fonction du choix des k premiers paramètres qui sont :

$y_0 \dots y_{k-1}$ (il y a k éléments : k degrés de liberté)

Preuve (proposition p 94) (multiplicité 1)

Polynôme en n degrés $\alpha = 1 : \left(\sum_{i=1}^k c_i \cdot n^{i-1} \right) \cdot (\lambda_1)^n$

Soit λ_1 : solution de l'équation $P(\lambda) = 0$

↳ de multiplicité 1

can multiplicité 1

$$= \alpha n^{n-1} \lambda_1^n = \alpha n^0 \lambda_1^n = \alpha \lambda_1^n$$

Montrons que $Y_n = \alpha \lambda_1^n$ est solution de l'équation homogène

$$\begin{aligned} & a_0 Y_{n+k} + \dots + a_k Y_n \\ &= a_0 \alpha \lambda_1^{n+k} + a_1 \alpha \lambda_1^{n+k-1} + \dots + a_k \alpha \lambda_1^n \\ &= \alpha \lambda_1^n \left[a_0 \lambda_1^k + a_1 \lambda_1^{k-1} + \dots + a_k \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$= P(\lambda_1) = 0$

• Pour une racine double: can multiplicité 2

$Y_n = \alpha \lambda_1^n$ est toujours solution mais on a aussi

$Z_n = \beta n \lambda_1^n$ $\beta n^{2-1} \lambda_1^n = \beta n \lambda_1^n$

(pour la preuve, il faut savoir que si λ_1 est racine de multiplicité m , alors $P(\lambda_1) = 0$

$$\begin{aligned} P'(\lambda_1) &= 0 \\ P''(\lambda_1) &= 0 \end{aligned}$$

(A la fois une racine de P et P') $P^{(n-1)}(\lambda_1) = 0$)

• Racine triple: à la fois une racine de P , P' et P''

$$W_n = [\text{polynôme de degré 1 en } n] \times \lambda_1^n$$

P94

Exemple:

a) $X_{n+3} + X_{n+2} + X_{n+1} + X_n = 0$ ($\rightarrow$ éq homogène d'ordre 3)

Equation caractéristique:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 0\lambda + 1) = 0$$

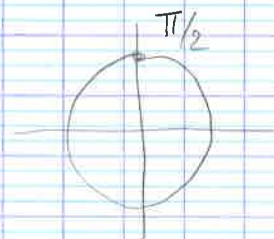
$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - i^2) = 0 \quad \text{car } i^2 = -1$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -i$$

$$\lambda_2 = e^{i\pi/2} \quad \rho^n \cos n\theta$$

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha (-1)^n + \beta 1^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \gamma 1^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \alpha (-1)^n + \beta \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \gamma \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$



b) $X_{n+3} - 6X_{n+2} + 11X_{n+1} - 6X_n = 2$

Equation homogène: $X_{n+3} - 6X_{n+2} + 11X_{n+1} - 6X_n = 0$

Equation caractéristique: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

Une solution évidente: $\lambda_1 = 1$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$\lambda_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

$\lambda_3 = \frac{5+1}{2} = 3$

⇒ Solution de l'équation homogène:

$X_n = \alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma 3^n$

9.2.2

On doit avoir autant de paramètre que l'ordre de l'équation

9.3.1

Exemples p 95 :

* $X_{n+3} + X_{n+2} + X_{n+1} + X_n = n+2$

(cf avant a) p 94)

Equation homogène :

$X_n = \alpha (-1)^n + \beta \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \gamma \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Le second membre est un polynôme de degré 1

De plus 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique

On cherche donc une solution du type $an + b = Q(n)$

$$\underbrace{X_{n+3}}_{a(n+3)+b} + \underbrace{X_{n+2}}_{a(n+2)+b} + \underbrace{X_{n+1}}_{a(n+1)+b} + \underbrace{X_n}_{a(n)+b} = n+2$$

⇒ $4an + 4b + 6a = n + 2$

⇒ $\begin{cases} 4a = 1 \\ 4b + 6a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$

Solution particulière : $X_n^* = \frac{n}{4} + \frac{1}{8}$

Solution de l'équation générale :

$$X_n = \alpha (-1)^n + \beta \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \gamma \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n}{4} + \frac{1}{8}$$

$$* X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2$$

Equation homogène : $X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 0$

Equation caractéristique : $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

1 est solution double.

$$X_n = (an + b) 1^n$$

$$= an + b$$

→ solution de l'éq homogène

Solution particulière : type polynomial

⚠ 1 racine double de l'équation caractéristique :

On cherche une solution du type :

$$X_n^* = Cn^2 \quad n^2 \mathcal{O}(n)$$

$$X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2$$

$$c(n+2)^2 - 2c(n+1)^2 + cn^2 = 2$$

$$c(n^2 + 4n + 4) - 2c(n^2 + 2n + 1) + cn^2 = 2$$

$$cn^2 + 4cn + 4c - 2cn^2 - 4cn - 2c + cn^2 = 2$$

$$2c = 2 \Leftrightarrow c = 1$$

$$X_n^* = cn^2 = 1 \times n^2$$

Solution particulière : $X_n^* = n^2$

Solution de l'équation générale : $Y_n = an + b + n^2$

9.3.2

$$\delta^n = e^{n \ln \delta} \quad \text{si } \delta > 0$$

P 96 ex n°1 :

$$X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2^n$$

Equation homogène (cf avant)

$$X_n = an + b$$

Solution particulière: $X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2^n$

Second membre exponentiel (puissance nème)

2 n'est pas racine de l'équation caractéristique donc $d=0$

On cherche une solution du type $c2^n$

$$X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2^n$$

$$c2^{n+2} - 2c2^{n+1} + c2^n = 2^n$$

$$4c - 4c + c = 1$$

$$\Rightarrow c = 1$$

$\Rightarrow$ Solution particulière: $X_n^* = 2^n$

Solution générale: $Y_n = an + b + 2^n$

Sol particulière de la forme $cn^d 2^n$
($d=0$ si 2^n n'est pas racine)

en $\div$ par 2^n

P 96 ex n°2 :

$$X_{n+2} + 2X_{n+1} + 2X_n = 3^n + n \quad (\text{2 genres qui tombe au raschel})$$

Equation homogène:

$$X_{n+2} + 2X_{n+1} + 2X_n = 0$$

Equation caractéristique: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$$(\lambda + 1)^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 - i^2 = 0$$

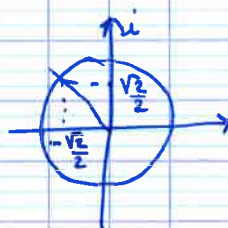
$$(\lambda + 1 - i)(\lambda + 1 + i) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 + i \quad \lambda_2 = -1 - i$$

$$|\lambda_{\pm}| = \sqrt{(-1)^2 + (\pm i)^2} = \sqrt{2}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$= \sqrt{2} e^{3i\pi/4}$$



Solution de l'équation homogène :

$$X_n = (\sqrt{2})^n \left[\alpha \cos \left(\frac{3n\pi}{4} \right) + \beta \sin \left(\frac{3n\pi}{4} \right) \right]$$

1^{ère} solution particulière :

$$X_{n+2} + 2X_{n+1} + 2X_n = 3^n$$

3 n'est pas racine de l'équation caractéristique

On cherche $X_n^* = c3^n$

$$c3^{n+2} + 2c3^{n+1} + 2c3^n = 3^n$$

en divisant par 3^n

$$\rightarrow 9c + 6c + 2c = 1$$

$$\Rightarrow 17c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{17}$$

$$\boxed{X_n^* = \frac{3^n}{17}}$$

2^e solution particulière :

$$X_{n+2} + 2X_{n+1} + 2X_n = n$$

1 n'est pas solution de l'équation caractéristique

donc $Y_n^* = an + b$

$$a(n+2) + b + 2[a(n+1) + b] + 2(an + b) = n$$

$$5an + 4a + 5b = n$$

$$\begin{cases} 5a = 1 \\ 4a + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{4}{25} \end{cases}$$

$$Y_n^* = \frac{n}{5} - \frac{4}{25}$$

Conclusion : solution générale :

$$\boxed{Z_n = (\sqrt{2})^n \left[\alpha \cos \left(\frac{3n\pi}{4} \right) + \beta \sin \left(\frac{3n\pi}{4} \right) \right] + \frac{3^n}{17} + \frac{n}{5} - \frac{4}{25}}$$

9.4 Résolution complète

exemple : $X_{n+2} + 2X_{n+1} + X_n = 2^n$ $X_0 = 0$ $X_1 = 1$

Equation homogène : $X_{n+2} + 2X_{n+1} + X_n = 0$

Equation caractéristique : $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$X_n = (an + b)(-1)^n$$

Solution particulière : $X_{n+2} + 2X_{n+1} + X_n = 2^n$

Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique

On cherche une solution de type :

$$c 2^{n+2} + 2c 2^{n+1} + c 2^n = 2^n$$

On divise par 2^n :

$$4c + 4c + c = 1 \quad c = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow Y_n = \frac{2^n}{9}$$

Solution de l'équation générale est :

$$Z_n = (an + b)(-1)^n + \frac{2^n}{9}$$

Pour l'équation complète : on a $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$

$$z_0 = (a \cdot 0 + b)(-1)^0 + \frac{2^0}{9} = 0$$

$$z_1 = (a + b)(-1)^1 + \frac{2^1}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + \frac{1}{9} = 0 \\ -a - b + \frac{2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{9} \\ a = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$W_n = \left(\left(-\frac{2}{3} \right) n - \frac{1}{9} \right) (-1)^n + \frac{2^n}{9}$$

9.5 Comportement asymptotique de U_n

9.5.1 Exemple

Exemple 1: p 97

$$X_n = X_{n-1} + 6X_{n-2} + 8 \quad X_0 = 1 \quad X_1 = -1$$

On pose $p = n-2$ ou $n = p+2$

$$X_{p+2} - X_{p+1} - 6X_p = 8$$

$$X_{n+2} - X_{n+1} - 6X_n = 8$$

Équation homogène: $X_{n+2} - X_{n+1} - 6X_n = 0$

$$\text{Eq. caractéristique: } \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 3$$

$$X_n = a(-2)^n + b(3^n)$$

Solution particulière: $X_{n+2} - X_{n+1} - 6X_n = 8$

Comme 1 n'est pas racine de l'éq. caractéristique,

On cherche $X_n = c$

$$c - c - 6c = 8 \Leftrightarrow -6c = 8 \Leftrightarrow c = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Sol. éq générale: } Y_n = a(-2)^n + b(3^n) - \frac{4}{3}$$

mouvement sinusoïdal explosive

Sol complète:

$$\begin{cases} Y_0 = a + b - \frac{4}{3} = 1 \\ Y_1 = -2a + 3b - \frac{4}{3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{7}{3} \\ -2a + 3b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{7}{3} \\ 5b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$Z_n = \frac{4}{3}(-2)^n + 3^n - \frac{4}{3}$$

Le mouvement sera monotone croissant à partir d'un certain rang et la solution diverge vers $+\infty$

Exemple 2:

$$3X_n = 3X_{n-1} - X_{n-2} + 1 + n$$

$$3X_{n+2} - 3X_{n+1} + X_n = 1 + (n+2)$$

$$\Leftrightarrow 3X_{n+2} - 3X_{n+1} + X_n = n+3$$

Equation homogène: $3X_{n+2} - 3X_{n+1} + X_n = 0$

Equation caractéristique: $3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$

$$\Delta = 9 - 4 \times 3$$

$$= -3 = (\sqrt{3}i)^2$$

$$\lambda_1 = \frac{3+i\sqrt{3}}{6}$$

$$\lambda_2 = \frac{3-i\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$|\lambda_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36}} = \sqrt{\frac{12}{36}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{i\pi/6}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-i\pi/6}$$

$$\text{donc } X_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^n \left[\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right]$$

Solution particulière: Comme 1 n'est pas ^{racine} de l'équation caractéristique, $Y_n = an + b$

$$3(a(n+2) + b) - 3(a(n+1) + b) + an + b = 3 + n$$

$$an + 3a + b = n + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$Y_n = n$$

Solution de l'équation générale:

$$Z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^n \left[\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right] + n$$

→ Mot sinusoïdal amorti
pourquoi amorti

Equation complète:

$$\begin{cases} z_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^0 [\alpha] + 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\alpha \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \beta \right] + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$W_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \left[\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right] + n$$

Mouvement monotone croissant à partir d'un certain rang, la solution diverge vers $+\infty$

9.6 Système d'équation

9.6-2 Equation Homogène

Dém: Par récurrence:

$$n=0 \quad U_0 = A^0 U_0 \quad \text{ok}$$

$$n=1 \quad U_1 = A U_0 \quad \text{cf formule de récurrence pour } n=0$$

$$n \rightarrow 1 \quad \text{on suppose } U_n = A^n U_0$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= A U_n = A A^n U_0 \\ &= A^{n+1} U_0 \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Exemple: P99

$$U_{n+1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} U_n$$

Il faut diagonaliser A

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 4 = (2-\lambda)(6-\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 6$$

$$\text{Trace: } 4+4 = \sum \lambda_i = 8 = 2+6 \quad \text{ok}$$

$$\text{dét: } 16-4 = 12 = \prod \lambda_i \quad \text{ok}$$

$$E_{\lambda_1=2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+2y=0 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} \quad v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2=6} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=2y \Rightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1^{ère} présentation :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \underset{\lambda_1}{\alpha} \underset{\uparrow}{2}^n \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \underset{\lambda_2}{\beta} \underset{\uparrow}{6}^n \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(α, β) dépendent des conditions initiales (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x_n = \alpha 2^n + \beta 6^n \\ y_n = -\alpha \frac{2^n}{2} + \beta \frac{6^n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \alpha + \beta \\ y_0 = \frac{\beta - \alpha}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_1 + 2L_2 \begin{cases} x_0 + 2y_0 = 2\beta \\ \alpha = x_0 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{x_0}{2} + y_0 \\ \alpha = \frac{x_0}{2} - y_0 \end{cases}$$

Conclusion :

$$\begin{cases} x_n = \left(\frac{x_0}{2} - y_0 \right) 2^n + \left(\frac{x_0}{2} + y_0 \right) 6^n \\ y_n = \left(\frac{y_0}{2} - \frac{x_0}{4} \right) 2^n + \left(\frac{x_0}{2} + y_0 \right) \frac{6^n}{2} \end{cases}$$

2^e présentation :

Calcul de P^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right] \leftrightarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow {}^{L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = P D^n P^{-1} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 6^n \\ -\frac{2^n}{2} & \frac{6^n}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2^n+6^n}{2} & 6^n-2^n \\ \frac{6^n-2^n}{4} & \frac{2^n+6^n}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2^n+6^n}{2} X_0 + (6^n-2^n) Y_0 \\ \frac{6^n-2^n}{4} X_0 + \frac{2^n+6^n}{2} Y_0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} X_n = \frac{2^n+6^n}{2} X_0 + (6^n-2^n) Y_0 \\ Y_n = \frac{6^n-2^n}{4} X_0 + \frac{2^n+6^n}{2} Y_0 \end{cases}$$

9.6.3 Stabilité de l'équilibre

9.6.4 Solution particulière

Rmq : si $\det(I-A) = 0$

$\Leftrightarrow \det(A-I) = 0$ (la méthode ne fonctionne pas car $A-I$ pas inversible)
donc la méthode ne fonctionne pas si 1 est v.p.

Démonstration :

Supposons que 1 n'est pas valeur propre de A

On cherche une solution particulière de $U_{n+1} = A U_n + B$

Prenons $U_{n+1} = U_n = C$ alors $C = AC + B$

$$(I-A)C = B$$

$$C = (I-A)^{-1} B \quad \text{Q.E.D.}$$

Dem :

Supposons $U_{n+1} = AU_n$ solution de l'équation homogène

$$C = AC + B$$

$$\text{alors } V_n = U_n + C$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} + C = AU_n + AC + B \\ &= A(U_n + C) + B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = AV_n + B \quad V_n \text{ solution de l'équation générale}$$

Rmq :

- La solution particulière correspond à l'équilibre du système
- Avec U_n solution de l'équation générale
 $V_n = U_n - U_E$ est alors solution de l'équation homogène

9.7 Diagramme de phase

Exemple P100 $U_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Système homogène : $U_{n+1} = AU_n$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2/3 \\ 1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2/3-\lambda) - 2/9$$
$$= \frac{2}{3} + \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \lambda - \frac{2}{9}$$

$$= \lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + \frac{4}{9}$$
$$\Delta = \frac{25}{9} - \frac{16}{9} = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{5/3 - 1}{2} \quad \lambda_2 = \frac{5/3 + 1}{2}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\text{Trace} : 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\det = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} = \pi \lambda_i$$

$$E_{\lambda_1} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = 4/3$$

$$\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{3} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{4}{3} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$\alpha (\lambda_1)^n (V_1) + \beta (\lambda_2)^n (V_2)$

où (α, β) dépendent des conditions initiales

Calculons l'équilibre : pour trouver solut^o générale

$$X_{n+1} = X_n = X_e$$

$$Y_{n+1} = Y_n = Y_e$$

$$\begin{cases} X_e = X_e + \frac{2}{3} Y_e + 2 \\ Y_e = \frac{1}{3} X_e + \frac{2}{3} Y_e + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_e = -3 \\ -3 = \frac{1}{3} X_e - 2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_e = -6 \\ Y_e = -3 \end{cases}$$

Solution de l'équation générale :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{4}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_0 = \alpha + \beta - 6 \\ y_0 = -\alpha + \beta/2 - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_1 + L_2 \begin{cases} x_0 + y_0 = \frac{3}{2}\beta - 9 \\ \alpha = x_0 - \beta + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2}{3}(x_0 + y_0) + 6 \\ \alpha = \frac{1}{3}x_0 - \frac{2}{3}y_0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}x_0 - \frac{2}{3}y_0\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\frac{2}{3}(x_0 + y_0) + 6\right] \left(\frac{4}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Rmq : Ensemble de stabilité de l'équilibre :

X

$$\left\{ (x_0, y_0) \mid \frac{2}{3}(y_0 + x_0) + 6 = 0 \right\}$$

↑ pour que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} y_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Car $\frac{4}{3} > 1$ donc on veut

↓ = 0

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{4}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

où (α, β) dépendent des cond^o initiales

Calculons d'eq $X_{n+1} = X_n = X_e$
 $Y_{n+1} = Y_n = Y_e$

$$\begin{cases} X_e = X_e + \frac{2}{3} Y_e + 2 \\ Y_e = \frac{1}{3} X_e + \frac{2}{3} Y_e + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_e = -3 \\ -3 = \frac{1}{3} X_e - 2 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_e = -6 \\ Y_e = -3 \end{cases}$$

Sol^o de l'eq générale

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{4}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X_0 = \alpha + \beta - 6 \\ Y_0 = -\alpha + \beta/2 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1. + 2. \quad X_0 + Y_0 = \frac{3\beta}{2} - 9 \\ \alpha = X_0 - \beta - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{2}{3} (X_0 + Y_0) + 6 \\ \alpha = \frac{1}{3} X_0 - \frac{2}{3} Y_0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3} X_0 - \frac{2}{3} Y_0\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\frac{2}{3} (X_0 + Y_0) + 6\right] \left(\frac{4}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} +$$

Ens de stabilité de l'équilibre

$$= \left\{ (x_0, y_0) / \frac{2}{3}(x_0 + y_0) + 6 = 0 \right\}$$

$$X_{n+1} - X_n = \frac{2}{3} Y_n + 2$$

$$\Delta X = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} Y_n + 2 = 0$$

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{3} X_n - \frac{1}{3} Y_n + 1$$

$$\Delta Y = 0 \Leftrightarrow Y = X + 3$$

$$\begin{aligned} \Delta X > 0 & \Rightarrow \frac{2}{3} Y + 2 > 0 \\ & \Rightarrow Y > -3 \\ \Delta Y < 0 & \Rightarrow \frac{1}{3} X - \frac{1}{3} Y + 1 < 0 \\ & \Rightarrow Y > X + 3 \end{aligned}$$

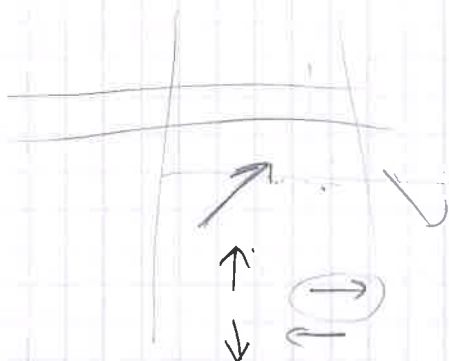
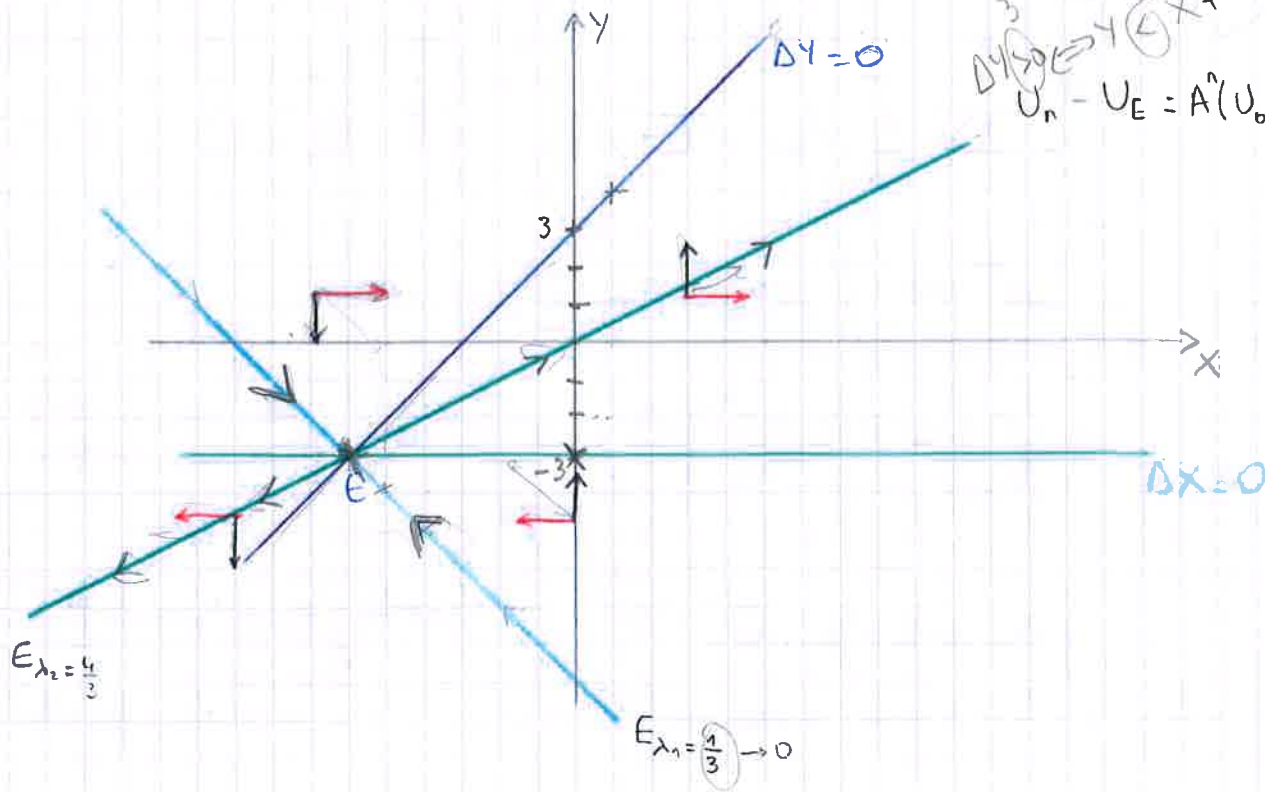
$$Y_{n+1} - Y_n > 0$$

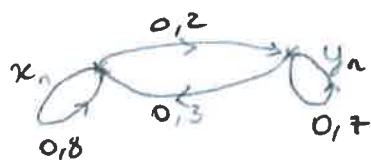
$$\frac{1}{3} X - \frac{1}{3} Y + 1 > 0$$

$$\frac{1}{3} Y < \frac{1}{3} X + 1$$

$$\Delta Y > 0 \Rightarrow Y < X + 3$$

$$U_n - U_E = A^n (U_0 - U_E)$$





$$y_{n+1} = 0,2x_n + 0,7y_n$$

+1
68

p. 102

Ex 1

proportion d'emploi

proportion sans emploi

$$a) \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,2x_n + 0,7y_n \end{cases}$$

b) C'est un système de Markov car il s'agit bien d'une matrice de transition d'ordre 1

Matrice de Transition

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Somme de chaque colonne = 1

c) la matrice est régulière car elle est positive (et positive)

$$d) \begin{vmatrix} 0,8-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0,7-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{8}{10}-\lambda\right)\left(\frac{7}{10}-\lambda\right) - \frac{6}{100}$$

$$= \lambda^2 - \frac{15}{10}\lambda + \frac{56}{100} - \frac{6}{100}$$

$$= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}$$

comme T est une M régulière 1 est vp de multiplicité 1

$$\Delta = \frac{9}{4} - \frac{4}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

ok

$$\lambda_2 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 1$$

car les autres vp ont $|\lambda| < 1$.

Vérification Trace = $0,8 + 0,7 = 1,5 = \sum \lambda_i$

$$\text{Det} = \frac{56}{100} - \frac{6}{100} = \frac{1}{2} = \prod \lambda_i$$

$$E_{\lambda_1 = \frac{1}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3x + 0,3y \\ 0,2x + 0,2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = -x \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2 = 1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,2 & 0,3 \\ 0,2 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,2x + 0,3y \\ 0,2x - 0,3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ses composantes stochastiques $\oplus$

$$\sum \text{composantes} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$V_2 = \frac{3}{5} U_2 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha (\lambda_1)^n V_1 + 0 V_2$$

⚠ Pas β .

En identifiant pour $n=0$

$$\begin{cases} x_0 = \alpha + \frac{3}{5} \\ y_0 = -\alpha + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\alpha = x_0 - \frac{3}{5}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(x_0 - \frac{3}{5}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

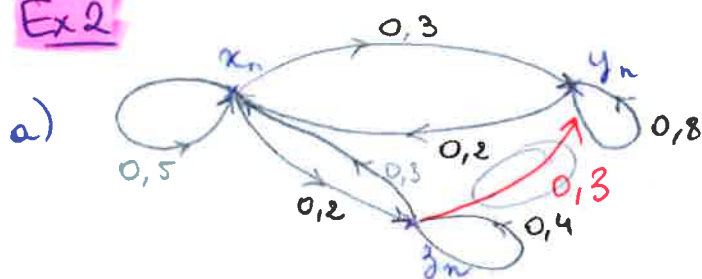
α

$$\lambda_1^n V_1 + V_2$$

$$\frac{2}{5} \times 20 = 40\%$$

le système tend vers $\begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ soit 40% de ~~sans~~-emploi sans et 60% d'employés

Ex 2



y_n ne peut pas devenir z_n



$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\text{où } T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}$$

b) Système récurrent d'ordre 1 avec matrice de transition avec éléments $\in [0,1]$

$\Sigma \text{ colonne} = 1 \rightarrow M$ de transition

c) Bien que T ne soit pas positive, T^2 l'est donc la matrice est régulière

d)

72
69

$$\begin{vmatrix} 0,5-\lambda & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0,3 & 0,8-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & c_2-c_1 & c_3-c_1 \\ 0,3 & 0,5-\lambda & 0 \\ 0,2 & -0,2 & 0,2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(0,5-\lambda)(0,2-\lambda)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{5} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad \lambda_3 = 1$$

$$\text{Trace} = 0,5 + 0,8 + 0,4 = 1,7 = \sum \lambda_i$$

$$\det = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \end{vmatrix} = 0,2 \begin{vmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0,3 \end{vmatrix} + 0,4 \begin{vmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{vmatrix}$$

$$= 0,2(0,06 - 0,24)$$

$$E_{\lambda_1 = \frac{1}{5}} = 0,2$$

$$10 \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x+2y+3z \\ 3x+6y+3z \\ 2x+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=-x \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$10 \times \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & -0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2y + 3z \\ 3x + 3y + 3z \\ 2x - z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = -3x \\ z = 2x \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_3} = 1$$

$$10 \times \begin{pmatrix} -0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5x + 2y + 3z \\ 3x - 2y + 3z \\ 2x - 6z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = \frac{1}{3}x \end{cases}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma \text{compo} = 1 + 2 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$V_3 = \frac{3}{10} U_3 = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 6/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{5} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{1}{2} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/10 \\ 6/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

où α, β dépendent des conditions initiales

Si $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est la distribution à l'état initial

$$\begin{cases} x_0 = \alpha + \beta + \frac{3}{10} \\ y_0 = -3\beta + \frac{6}{10} \\ z_0 = -\alpha + 2\beta + \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0,5-\lambda & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1/5 \\ \lambda_2 = 1/2 \\ \lambda_3 = 1 \end{array}$$

$$E_{\lambda_1} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$10 \times \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3x+2y+3z \\ 3x+6y+3z \\ 2x+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=-x \end{cases} \quad V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$10 \times \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & -0,1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2y+3z \\ 3x+3y+3z \\ 2x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=-3x \\ z=2x \end{cases}$$

$$V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_3} = 1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$10 \times \begin{bmatrix} -0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & -0,6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -5x+2y+3z \\ 3x-2y+3z \\ 2x-6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=2x \\ z=\frac{1}{3}x \end{cases}$$

$$V_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma \text{ componentes} = 1 + 2 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$V_3 = \frac{3}{10} V_1 = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 6/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{5}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/10 \\ 6/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

où α, β dépendent des conditions initiales

Si $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est la distribution à l'état initial

$$\begin{cases} x_0 = \alpha + \beta + \frac{3}{10} \\ y_0 = -3\beta + \frac{6}{10} \\ z_0 = -\alpha + 2\beta + \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{3}{10} - \frac{y_0}{3} \\ \alpha = x_0 + \frac{y_0}{3} - \frac{5}{10} \end{cases}$$

$$\text{Vérif } \left. \begin{aligned} -\alpha + 2\beta + \frac{1}{10} &= -x_0 - \frac{y_0}{3} + \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2y_0}{3} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{13}{10} - x_0 - y_0 = z_0 \end{aligned} \right\} \text{ ok}$$

Solution

$$\begin{cases} x_n = \left(x_0 + \frac{y_0}{3} - \frac{5}{10}\right) \frac{1}{5^n} + \left(\frac{2}{10} - \frac{y_0}{3}\right) \frac{1}{2^n} + \frac{3}{10} \\ y_n = -3 \left(\frac{2}{10} - \frac{y_0}{3}\right) \frac{1}{2^n} + \frac{6}{10} \\ z_n = -\left(x_0 + \frac{y_0}{3} - \frac{5}{10}\right) \frac{1}{5^n} + 2 \left(\frac{2}{10} - \frac{y_0}{3}\right) \frac{1}{2^n} + \frac{1}{10} \end{cases}$$

Révisions :

exercice sur les suites ex 2 p 91

$$u_{n+2} = \frac{4u_n + 3}{2u_n} \quad u_0 = 5 \quad u_n = u_{2n} \quad w_n = u_{2n+1}$$

$$a) f(x) = \frac{4x+3}{2x} = 2 + \frac{3}{2x}$$

$$b) n=0 \quad w_0 = u_1 = f(u_0) = 2 + \frac{3}{10} = 2,3$$

$$v_0 = u_0 = 5$$

Effectivement $w_0 < v_0$

$n \mapsto n+1$ On suppose $w_n < v_n$

$$\text{or } w_{n+1} = f \circ f(u_n) \text{ et } v_{n+1} = f \circ f(v_n)$$

Montrons que $f \circ f$ est croissante

$$f'(x) = -\frac{3}{2x^2} \leq 0 \text{ donc } f \text{ est décroissante}$$

$$\text{Comme } (f \circ f)' = \underbrace{f'}_{\leq 0} \times \underbrace{f' \circ f}_{\leq 0} > 0$$

$f \circ f$ strictement croissante

$$w_n < v_n$$

$$\Rightarrow f \circ f(w_n) < f \circ f(v_n)$$

$$w_{n+1} < v_{n+1}$$

QED.

c) w_{n+1} est une suite récurrente avec $f \circ f$ croissante donc v_n monotone et de même pour w_n

$$v_1 = u_2 = 2 + \frac{3}{2 \times \frac{23}{10}} = 2 + \frac{15}{23} = 2,65 < \underset{5}{v_0}$$

donc (v_n) est décroissante.

$$w_1 = u_3 = 2 + \frac{3}{2 \times 2,65} = 2,56$$

$w_1 > w_0$ et w_n croissante

$$w_0 < w_n < v_n < v_0$$

w_n croissante majorée par v_0
 v_n décroissante minorée par w_0 } $\Rightarrow$ les suites convergent

On cherche les points fixes de f :

$$f(x) = 2 + \frac{3}{2x}$$

$$f \circ f(x) = 2 + \frac{3}{2(2 + \frac{3}{2x})} = 2 + \frac{3x}{3 + 4x} = x$$

$$\Leftrightarrow 6 + 8x + 3x = 3x + 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = 16 + 24 = 40$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$$

~~pas de notre intervalle.~~

(u_{2n}) et (u_{2n+1})

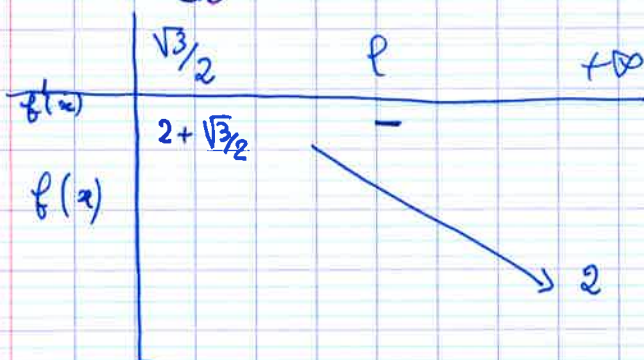
donc les 2 suites convergent vers la même lim car il n'y a qu'un pt fixe

$l = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ les suites sont adjacentes

Donc (u_n) converge aussi vers $l = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$f'(x) = \frac{-3}{2x^2}$$

$$f(x) = 2 + \frac{3}{2x}$$



Remarque si $u_0 \in \left[\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right[$

$$u_1 \in [2; +\infty[$$

Comme $2 + \sqrt{\frac{3}{2}} > 2$ $I = [2; +\infty[$

$$\begin{aligned} f(I) &\subset \left[2; 2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \\ &\subset [2; +\infty[\end{aligned}$$

Comme $x \geq 2$ $x^2 \geq 4$

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4} \quad \frac{3}{2x^2} \leq \frac{3}{8}$$

$$\text{Sur } I \quad |f'(x)| \leq \frac{3}{8} < 1$$

Le th de convergence s'applique et (u_n) converge vers 1 pt fixe de I

Comme il n'y a qu'un pt fixe de I
donc si $u_0 \in \left[\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right[$

(u_n) converge vers $1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

e) $|f'(l)| < 1$ donc l est un équilibre stable

sous contrainte

- Si M SD⁺ ou -
regarder autour du pt prop de convexité locale
autour de $x \rightarrow$ si $\geq 0 \rightarrow$ min local
 $\rightarrow$ trouver les pp.
 $\rightarrow$ Sinon méthode des direct°
Si cette dir n'est pas admissible.
 $\rightarrow$ pbm réglé.
- Si non def, ts les cas sont possibles