Compléments sur le chapitre 3 : Application linéaire

Démonstration de la proposition 8.1 : Immédiat

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Soient $(\alpha, \beta) \in K^2$ et $(X, Y) \in E^2$, on a :

$$u(\alpha X + \beta Y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{d'après (i) déf 8.1}}}{=} u(\alpha X) + u(\beta Y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{d'après (ii) déf. 8.1}}}{=} \alpha u(X) + \beta u(Y).$$

□

(*)

Démonstration de la Proposition 8.3 : Non

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ une base de E.

$$u(E) := \left\{ u(x) \;/\; x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . V_i \in E \;, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

(car $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ engendre E)

$$= \left\{ u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i\right), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, u(V_i), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\} \text{ (car } u \text{ linéaire)}$$

= ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u(V_1), u(V_2), \dots, u(V_n)$

Or on a vu (cf. Proposition 1.4) que l'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs d'un ensemble (F ici) est un sev de cet ensemble.

□

Exemple 11 :

- $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \mapsto u(x, y) = (x + y \,;\, x - y \,;\, x)$$

- $u(1,0) = (1, 1, 1)$ et $u(0,1) = (1, -1, 0)$

Vérifions si la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est libre :

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \;/\; \alpha_1 (1, 1, 1) + \alpha_2 (1, -1, 0) = (0, 0, 0)$

$$\iff (\alpha_1 + \alpha_2 \,;\, \alpha_1 - \alpha_2 \,;\, \alpha_1) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \implies \alpha_2 = \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est donc libre, son rang est donc 2 (car 2 est le nbre max de vecteurs libres de la famille.

De plus, $\text{rang}(u) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc u non surjective.

Démonstration de la Proposition 8.4 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\text{Rang}(u) = \dim(F) \overset{\text{déf}}{\iff} \dim(\text{Im}(u)) = \dim(F)$

$\iff \text{Im}(u) = F$ (En effet soit A un ev et B un sev de A

$\dim B = \dim A \iff B = A$

ici $\text{Im}(u)$ est un sev de F)

$\overset{\text{déf}}{\iff} u(E) = F$

$\overset{\text{déf}}{\iff} \{ y \in F \,/\, \exists x \in E \text{ tel que } u(x) = y \} = F$

$\overset{\text{déf}}{\iff} u$ surjective.

$\boxtimes$

Démonstration de la Proposition 8.5 :

Soient $x, y \in \text{Ker}(u)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{cases} u(x+y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } u \text{ linéaire}}}{=} u(x) + u(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } x,y \in \text{Ker}(u)}}{=} 0 + 0 = 0 \quad \text{donc } x+y \in \text{Ker}(u) \\ u(\lambda x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } u \text{ linéaire}}}{=} \lambda \cdot u(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } x \in \text{Ker}(u)}}{=} \lambda \cdot 0 = 0 \quad \text{donc } \lambda . x \in \text{Ker}(u) \end{cases}$$

Ainsi $\text{Ker}(u)$ est un sev de E.

$\boxtimes$

Démonstration de la Proposition 8.6 :

1/ Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que u soit injective.

Soit $x \in \text{Ker}(u)$ donc $u(x) = 0 = u(0_E)$ (car on a vu que $u(0_E) = 0_F$). Comme u est injective, on a

$u(x) = u(0_E) \implies x = 0_E$ c'est-à-dire $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$.

2/ Supposons que $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Soient $x, x' \in E$ / $u(x) = u(x')$ alors

$$u(x) - u(x') = 0_F \underset{u \text{ linéaire}}{\Leftrightarrow} u(x) + u(-x') = 0_F$$

$$\underset{u \text{ linéaire}}{\Leftrightarrow} u(x - x') = 0_F \Rightarrow x - x' \in \mathrm{Ker}(u),$$

Comme $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\} \Rightarrow x - x' = 0_E \Leftrightarrow x = x'$

Donc u est injective. $\boxtimes$

(*) Exercice :

Soient $V_1, V_2, \dots, V_p$ p vecteurs linéairement dépendants de E et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On veut montrer que les vecteurs $u(V_1), u(V_2), \dots, u(V_p)$ sont linéairements dépendants.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ / $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u(V_i) = 0_F$

$\Leftrightarrow u\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i\right) = 0_F$ car u linéaire

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i = 0_E$

Comme $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ est une famille liée, les α_i ne sont pas tous nuls et donc $\{u(V_1), u(V_2), \dots, u(V_p)\}$ est une famille liée. $\boxtimes$

Exemple 13 :

1/ $f(1,1) = (1, 2, -2)$; $f(1;-1) = (-1; 2; 4)$

d'où $M = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1;-1) \end{pmatrix} = \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(où $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canonique).

2/ Calculons les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

On a $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3 = \alpha + \beta & (1) \\ 2 = \alpha - \beta & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow \alpha = 3 - \beta$

$(2) \Rightarrow 2 = 3 - 2\beta \iff \beta = \frac{1}{2}$

donc $\alpha = \frac{5}{2}$

Donc les coordonnées du vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ sont $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

D'où l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est $M . \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \\ 5 + 1 \\ -5 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

[Rappel : Expliquer que $\underset{(n,\underline{\underline{p}})}{M} \times \underset{(\underline{\underline{p}},r)}{N} = \underset{(n,r)}{T}$

Finalement $f(3,2) = (2 ; 6 ; -3)$.

Autre méthode : Ecrire la matrice A représentative de f dans la base canonique au départ et à l'arrivée puis calculer $A . \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a $A = \begin{pmatrix} f(1,0) & f(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

et $A . \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ soit $f(3,2) = (2 ; 6 ; -3)$. ☑