TD-6
Diagonalisation de matrice
Licence 1ère année

Exercice 1:

Calculons le polynome caractéristique $\begin{vmatrix} 2\text{-}\lambda & \text{-}1 \\ 0 & 1\text{-}\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)$.

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

$\mathrm{Det}(M) = 2$ et $\mathrm{Trace}(M) = 3$ on vérifie bien que le déterminant est le produit des valeurs propres et la trace est la somme des valeurs propres.

Comme les valeurs propres sont simples, on sait que la matrice est diagonalisable.

Il faut trouver les espaces propres.

Espace propre de $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & \text{-}1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $y = x$ un vecteur propre est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Espace propre de $\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & \text{-}1 \\ 0 & \text{-}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $y = 0$ un vecteur propre est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \text{-}1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier que le produit $\mathrm{P.D.P}^{-1}$ redonne bien M.

Exercice 2:

1) Calculons $A.v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc v_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 3$.

2) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2. \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -3-4+4 = -3$.

$\mathrm{Trace}(A) = 1 - 3 + 5 = 3$.

3) Pour trouver les valeurs propres restantes, on peut bien sûr calculer le polynôme caractéristique ou utiliser le fait que: $det\ (A) = \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3$ et que $Trace\ (A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, donc $\lambda_2.\lambda_3 = -1$ et $\mathrm{Trace}(A) = 3$ d'où $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ on peut utiliser $X^2 - SX + P = 0$ ou directement voir que les solutions évidentes sont $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$.

Espace propre de $\lambda_1 = 3$: on a déja trouvé $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme la valeur propre est simple, il n'y a pas d'autres vecteurs propres à trouver.

Espace propre de $\lambda_2 = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -3 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - z = 0 \\ 2x - 4y - 3z = 0 \\ -4x + 4y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = -y \\ x = -y \end{cases}$

D'où le vecteur propre suivant $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Espace propre de $\lambda_3 = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \\ -4x + 4y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} z = 0 \\ x = y \\ x = y \end{cases}$

D'où le vecteur propre suivant $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4) Puisque les valeurs propres sont simples, A est diagonalisable.

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3:

Essayer de diagonaliser les matrices suivantes:
(On calculera le déterminant et la trace afin de faire les vérifications d'usage).

- $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculons le polynôme caractéristique:

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)\left[(1+\lambda)^2 + 2\right]$.

Il n'y a pas de factorisation possible du second membre dans $\mathbb{R}$. La matrice n'admet qu'une valeur propre réelle -2, donc la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

- $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculons le polynôme caractéristique:

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) . \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) . [(1+\lambda)(2+\lambda) - 2]$

$= -(1+\lambda) . \left[\lambda^2 + 3\lambda\right] = -(1+\lambda) . [\lambda+3]\lambda$.

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 0$.
On vérifie que le déterminant vaut 0= Produit des vp.
De plus la trace =-4= somme des vp. OK.

Espace propre de $\lambda_1 = -3$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = -x \\ y = -x \\ z = 3x/2 \end{cases}$

On a donc le vecteur propre $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Espace propre de $\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ x - y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$

On a donc le vecteur propre $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Espace propre de $\lambda_3 = 0$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = x \\ y = x/2 \\ z = 3x/2 \end{cases}$

On a donc le vecteur propre $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

D'où la décomposition $A = P.D.P^{-1}$,

avec $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$.

• $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculons le polynôme caractéristique: (on additionne la ligne 2 et 3 à la une)

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6-\lambda & 6-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda) . \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$.

$= (6-\lambda) . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda) . \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda) . (2-\lambda)^2$.

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 6$.

On vérifie que le déterminant vaut 24= Produit des vp. (c'est un peu long).

De plus la trace =10= somme des vp. OK

Espace propre de $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - y \end{cases}$

On a donc les vecteurs propres $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Espace propre de $\lambda_3 = 6$: $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 3z - y \\ 4y - 8z = 0 \\ -4y + 8z = \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \\ y = 2z \end{cases}$ On a donc le vecteur propre $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice est bien diagonalisable.

D'où la décomposition $A = P.D.P^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

- $E = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons le polynôme caractéristique: (on fait $C_2 - C_1$ dans la colonne 2)
$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2+\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\,.\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$
$= (2-\lambda)\,.\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 2 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\,.\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\,.\,(1-\lambda)^2\,.$
Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
On vérifie que le déterminant vaut 2= Produit des vp.
De plus, la trace =4=1+1+2 somme des vp. OK

Expliquez qu'il vaut mieux commencer par les vp doubles ou triples puisque si l'espace propre n'a pas une dimension adaptée, il est inutile de continuer pour la diagonalisation (à moins que l'on demande le calcul explicite des vecteurs propres...).

(Espace propre de $\lambda_1 = 2$: $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} y = -x \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

On a donc le vecteur propre $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Espace propre de $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$: $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = x \\ y = -x \\ z = -x/2 \end{cases}$

On a donc le vecteur propre $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

L'espace propre de la valeur propre double 1 est donc de dimension 1, la matrice n'est donc pas diagonalisable.