

Chapitre 4 : Variables aléatoires

I) Définitions de base

Expérience (ou épreuve) aléatoire : c'est un ensemble de conditions précises caractérisant un processus à la suite duquel tel ou tel événement est réalisé ou non. C'est donc une expérience qui comporte plusieurs événements possibles, et qui forment ensemble l'univers Ω .

Variable aléatoire : c'est une fonction de Ω dans \mathcal{R} .

X est une « variable » car il peut prendre plusieurs valeurs différentes et est « aléatoire » car la venue de chaque valeur est liée au hasard.

Dans les jeux de hasard, les variables aléatoires associent un gain à chaque éventualité (résultat du lancer d'un ou plusieurs dés, d'un tirage à pile ou face, d'une roulette, ...)

Loi de probabilité : chaque valeur de X peut être associée à une probabilité selon une loi que l'on appelle loi de probabilité de X. Cette loi comprend donc les différentes valeurs de X ainsi que les probabilités associées.

Exemple 1 :

On jette un dé de 6 faces et on note le chiffre qui sort.

La loi de probabilité de X est :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ et } \forall x_i \in \Omega \quad P(X=x_i) = 1/6$$

Exemple 2 :

On jette un dé à 6 faces. Si le dé fait 5 ou 6, on gagne 1 €. Si l'on fait un 4, on ne gagne rien du tout. Si l'on fait 1, 2 ou 3, on perd -2 €.

La loi de probabilité de X est :

Valeurs de X	- 2	0	1
Probabilités	1/2	1/6	1/3

II) Caractéristiques et propriétés des lois de variables aléatoires discrètes

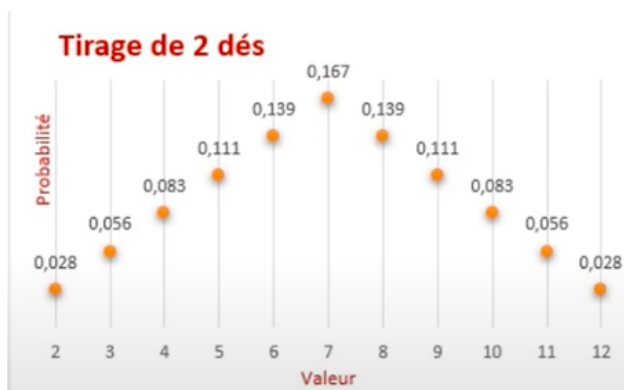
1) Rappel sur les différents types de variables

On distingue les variables qualitatives et les variables quantitatives :

<u>Variable qualitative :</u>	<u>Variable quantitative :</u>	
On ne peut pas calculer de moyenne. <i>Exemple :</i> la couleur des yeux des étudiants (0 marron, 1 bleu, 2 vert, 3 autre)	On peut calculer une moyenne. <i>Exemple :</i> le salaire, la taille, le poids, le nombre de frères et sœurs, etc.	
	<u>Variable discrète :</u>	<u>Variable continue :</u>
	Elle prend des valeurs isolées. <i>Exemple :</i> le nombre de frères et sœurs, le nombre de voitures, etc.	Elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle donné. <i>Exemple :</i> le poids, la taille, le salaire

2) Représentation graphique

On peut représenter graphiquement les lois de probabilité : pour les variables discrètes, on fait un diagramme en bâton (histogramme). Avec les différentes valeurs prises par X en abscisse et les probabilités associées en ordonnée.

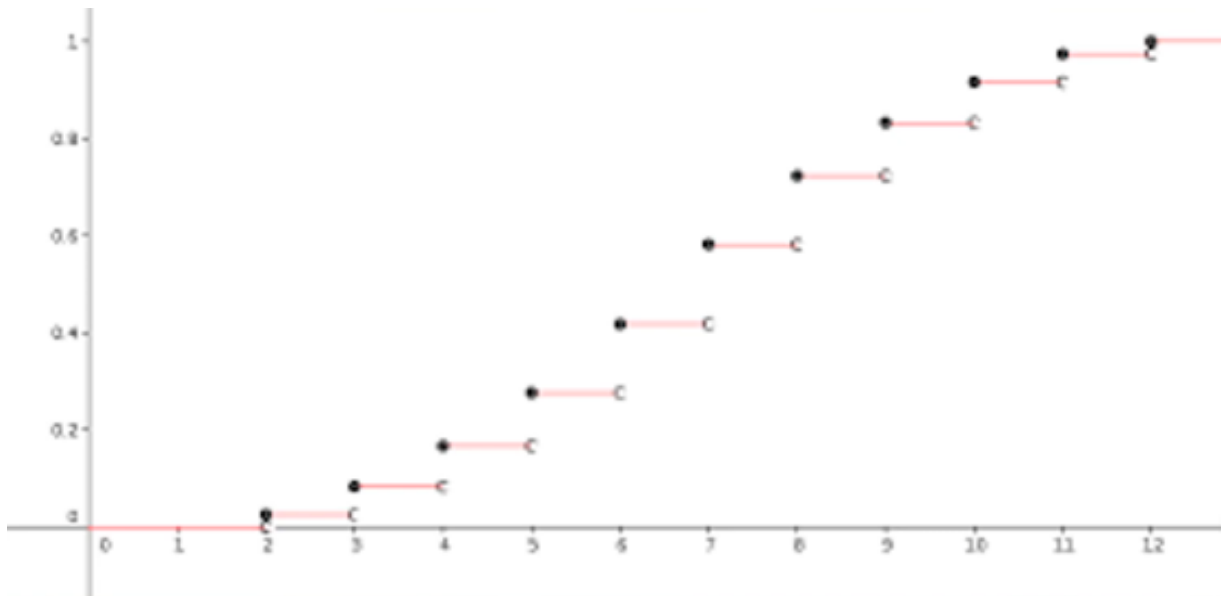


Mode = valeur prise par X associée à la probabilité la plus grande. (7)

Lorsque la loi de X ne possède qu'un seul mode, elle est unimodale. Lorsqu'elle en possède deux, elle est bimodale...

Variable de répartition = on peut également représenter la fonction de répartition F d'une loi de probabilité. C'est une fonction croissante en escalier pour les variables discrètes. La fonction de répartition est la fonction F telle que $F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

$$x \rightarrow F(x) = P(X \leq x)$$



3) Notion d'espérance et de variance

Définition de l'espérance : elle représente initialement le gain qu'un joueur est « en droit » d'attendre dans un jeu de hasard s'il joue un très grand nombre de fois.

Une variable aléatoire est dite **centrée** si son espérance est nulle.

Lorsque $E(X) = 0$ le jeu est dit équitable (*on a autant de chances de gagner que de perdre*).

Formule : Si X est une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alors l'espérance

de X vaut :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X=x_i)$$

Remarque = si X est la VA associée au gain, alors $E(X)$ désigne le gain moyen lorsque l'on joue un très grand nombre de fois.

Remarque = l'espérance est la moyenne des valeurs prises par la variable X pondérée par les probabilités $P(X=x)$.

Remarque = si la VA est comprise entre deux réels a et b , alors son espérance sera aussi comprise entre a et b .

Définition de la variance : elle représente la dispersion de la loi de probabilité (fluctuation autour de l'espérance). Elle se calcule par la moyenne des carrés des écarts à une tendance centrale (ici l'espérance). Sa racine carrée est l'écart-type.

Une variable aléatoire est dite réduite si sa variance est nulle.

Formule : Si X est une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alors la variance

de X vaut :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 \cdot P(X=x_i)$$

Remarque = la variance et l'écart au carré moyen entre les valeurs prises par la VA X et l'espérance de X pondérée par une probabilité $P(X=x)$

Exemple :

On jette un dé à 6 faces. Si le dé fait 5 ou 6, on gagne 1 €. Si l'on fait un 4, on ne gagne rien du tout. Si l'on fait 1, 2 ou 3, on perd -2 €.

Calculez la variance et l'espérance de ce jeu.

Valeurs de X	- 2	0	1
Probabilités	1/2	1/6	1/3

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X=x_i)$$

$$E(X) = (-2) \cdot (1/2) + 0 \cdot (1/6) + 1 \cdot (1/3) = - 2/3$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 \cdot P(X=x_i)$$

$$V(X) = [-2+(2/3)]^2(1/2) + [0+(2/3)]^2(1/6) + [1+(2/3)]^2(1/3) = 1,8888...$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,8888} \approx 1,374$$

Propriétés importantes de l'espérance et de la variance :

- $E(a.X+b) = a.E(X) + b$
- $V(a.X+b) = a^2.V(X)$
- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$: formule de Koëning-Huyghens
- Application K-H

Valeurs de X	- 2	0	1
Probabilités	1/2	1/6	1/3

$$V(X) = (-2)^2(1/2) + 0^2(1/6) + 1^2(1/3) - (-2/3)^2 = 1,8888\dots$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 :

Une variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2.
Déterminez sa loi de probabilité sachant que $E(X) = 1$ et $V(X) = 1/4$.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$P(X=0) = ?$	$P(X=1) = ?$	$P(X=2) = ?$

- 1) $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$
- 2) $E(X) = 0.P(X=0) + 1.P(X=1) + 2.P(X=2) = P(X=1) + 2.P(X=2) = 1$
- 3) $E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = (1/4) + 1^2$
 $E(X^2) = 0^2.P(X=0) + 1^2.P(X=1) + 2^2.P(X=2) = (1/4) + 1^2$
 $E(X^2) = P(X=1) + 4.P(X=2) = 5/4$

(1) $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$

(2) $P(X=1) + 2.P(X=2) = 1$

(3) $P(X=1) + 4.P(X=2) = 5/4$

{2} $P(X=1) = 1 - 2.P(X=2)$

{3} $1 - 2.P(X=2) + 4.P(X=2) = 5/4 \iff 2.P(X=2) = 5/4 - 1$
 $\iff P(X=2) = 1/8$

{2} $P(X=1) = 1 - 2.(1/8) \iff P(X=1) = 3/4$

{1} $P(X=0) = 1 - 3/4 - 1/8 \iff P(X=0) = 1/8$

La loi de probabilité de X est donc :

Valeurs de X	0	1	2
Probabilités	1/8	3/4	1/8

Exercice 2 :

Dans une classe de TD, les étudiants ont réalisé des travaux de groupe. Les notes st les suivantes :

Groupe	A	B	C	D
Note	10	11	13	17

Vous n'étiez pas la ce jour-là mais votre groupe si. Vous aurez donc sa note. Vous ne connaissez pas le nom de votre groupe, mais estimez que le travail n'était pas excellent. Et donc il y a 50% de chances que ce soit le groupe A, 25% de chances que ce soit le groupe B, 15% de chances que ce soit le groupe C et 10% que e soit le groupe D. Soit X la variable aléatoire égale à votre note.

- Déterminez $E(X)$, $V(X)$ et son écart-type.
- Le chargé de TD décide d'augmenter une note de 1 point. Quel impact cela aura-t-il se la variance, l'espérance et l'écart-type ?
- Il change d'avis et préfère augmenter une note de 10%. Quel impact cela aura-t-il sur $E(X)$, $V(X)$ et l'écart-type ?

a)

Groupe	A	B	C	D
x_i	10	11	13	17
$p(X=x_i)$	0,5	0,25	0,15	0,1

$$E(X) = 10 \times 0,5 + 11 \times 0,25 + 13 \times 0,15 + 17 \times 0,10 = 11,4$$
$$E(X^2) = 10^2 \times 0,5 + 11^2 \times 0,25 + 13^2 \times 0,15 + 17^2 \times 0,10 = 134,5$$
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 134,5 - 11,4^2 = 4,54$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4,54} \approx 2,13$$

b)

$$E(a.X+b) = a.E(X) + b \quad \rightarrow \quad E(X+1) = E(X) + 1 = 11,4 + 1 = 12,4$$
$$V(a.X+b) = a^2.V(X) \quad \rightarrow \quad V(X+1) = V(X) = 4,54$$
$$\sigma(X+1) = \sigma(X) = 2,13$$

c)

$$E(a.X+b) = a.E(X) + b \quad \rightarrow \quad E(1,1.X) = 1,1.E(X) = 11,4 \times 1,1 = 12,54$$
$$V(a.X+b) = a^2.V(X) \quad \rightarrow \quad V(1,1.X) = 1,1^2.V(X) = 4,54 \times 1,1^2 = 5,4934$$
$$\sigma(a.X) = a.\sigma(X) \quad \rightarrow \quad \sigma(1,1.X) = 2,13 \times 1,1 \approx 2,343$$

Exercice 3 :

Vous jouez à la roulette. Ce jeu comprend 37 cases numérotées de 0 à 36. Il y en a 18 rouges, 18 noires et 1 verte (la case n°0). Si vous misez sur une des deux couleurs, vous gagnez 2 fois votre mise si la couleur sort. Si vous jouez un numéro alors vous gagnez 36 fois la mise si le numéro sort. Enfin, toute mise sur le 0 est interdite. Cette roulette n'est pas truquée.

- Déterminez la loi puis calculez l'espérance et l'écart type du gain X_c si vous misez a euros sur 1 couleur.
- Déterminez la loi puis calculez l'espérance et l'écart-type du gain X_n si vous misez a euros sur 1 numéro.

a)

X_c	a	-a
$P(X_c=x_i)$	18/37	19/37

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X=x_i) \rightarrow a \cdot \frac{18}{37} - a \cdot \frac{19}{37} = -\frac{a}{37}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\rightarrow a^2 \cdot \frac{18}{37} + (-a)^2 \cdot \frac{19}{37} - \frac{37 \cdot a^2}{37} = a^2 \rightarrow a^2 - \frac{a^2}{37^2} = \frac{1368 \cdot a^2}{1369}$$

 et $\sigma(X_c) = \sqrt{V(X_c)} = \frac{6 \cdot a \cdot \sqrt{38}}{37}$

b)

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X=x_i) \rightarrow 35 \cdot a \cdot \frac{1}{37} - a \cdot \frac{36}{37} = -\frac{a}{37}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\rightarrow 1225 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{37} + (-a)^2 \cdot \frac{36}{37} - \frac{1261 \cdot a^2}{37} \rightarrow \frac{1261 \cdot a^2}{37} - \frac{a^2}{37^2} = \frac{46656 \cdot a^2}{1369}$$

 et $\sigma(X_n) = \sqrt{V(X_n)} = \frac{216 \cdot a}{37}$

Interprétation : exemple pour a = 10 euros

Couleurs	Numéros
$E(X_c) = -\frac{a}{37}$	$E(X_n) = -\frac{a}{37}$
$\sigma(X_c) = \frac{6a\sqrt{38}}{37}$	$\sigma(X_n) = \frac{216a}{37}$
$E(X_c) = -0,27$ euros $\sigma(X_c) = 9,99$ euros	$E(X_n) = -0,27$ euros $\sigma(X_n) = 58,38$ euros