Chapitre 2 : Probabilités simples

I) Calcul d'une probabilité

Calcul d'une probabilité : dans le cas général, une probabilité est la limite, quand le nombre d'expériences n tend vers l'infini, du ratio nombre de fois où l'événement se réalise sur le nombre d'expériences n :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{Nombre de fois où } A \text{ est réalisé} / n)$$

avec n = nombre d'expériences

II) Equiprobabilité : définition et conséquences

Définition de l'équiprobabilité : les différents événements élémentaires ont autant de chances les uns que les autres de se produire.

Dans ce cas-là, et dans ce cas seulement, on peut utiliser la formule :

$$P(A) = \text{nbre de cas favorables à } A / \text{nbre de cas total (possibles)}$$

EXEMPLE :

Je lance un dé à 6 faces.

- Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

On note P l'événement « obtenir un nombre pair »

On a 3 nombres paires sur les six nombres au total.

$$P(p) = \frac{3}{6} = 0,5$$

- Répondez à la même question sachant cette fois que le dé est truqué de telle manière que le numéro 6 sort deux fois plus souvent que n'importe quelle autre face.

$$P(6) = 2 \times P(1) + 2 \times P(2) + \dots +$$

Je reprends mon dé non truqué. Quelle est la proba $P(A)$ qu'une des faces fixées n'apparaisse jamais au cours de n lancers ?

$$\text{Premier lancer : } P(A) = \frac{5}{6}$$

$$\text{Deuxième lancer} = \frac{5}{6} * \frac{5}{6}$$

$$\text{Troisième lancer} = \frac{5}{6} * \frac{5}{6} * \frac{5}{6}$$

$$N^{\text{ième}} \text{ lancer} = \frac{5n}{6n}$$

- Quelle est la proba $P(B)$ que cette même face n'apparaisse jamais sur une infinité de lancers ?

$$P(B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^N = 0$$

Mais dans tous les cas, qu'il y ait équiprobabilité ou non, une probabilité correspond à la fréquence moyenne d'apparition d'un événement, et c'est un nombre compris entre 0 et 1.

III) Propriétés d'une probabilité

On retrouve les différentes propriétés des cardinaux, appliquées aux probabilités :

a) $P(\emptyset) = 0$

b) Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On généralise d'ailleurs cette formule à n événements incompatibles 2 à 2 :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{k=n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{k=n} P(A_k)$$

c) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ c'est très utile, on a très souvent recours à l'événement contraire !

d) Si $A \subset B$ alors : $P(B - A) = P(B) - P(A)$ avec $P(B) \geq P(A)$

e) Si A et B sont 2 événements quelconques, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

On généralise d'ailleurs cette formule à n événements quelconques à l'aide de la formule de Poincaré (ou formule du crible) :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{k-1} \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}})$$

On remarque qu'il s'agit exactement de la formule de Poincaré vue précédemment, les cardinaux étant remplacés par de probabilités.

EXERCICE D'APPLICATION

Exercice 1 :

Dans une université on estime que la probabilité que l'extincteur automatique d'incendie tombe en panne est de 18%, que la proba que le système d'alarme tombe en panne est de 12% et que la proba que les deux soient simultanément en panne est de 5%.

Calculer les proba :

Au moins un des deux systèmes fonctionne

Que les deux systèmes fonctionnent

A « l'extincteur automatique d'incendie est en panne » donc $P(A)=0,18$

B « le système d'alarme est en panne » donc $P(B) = 0,12$

$$P(A \cap B) = 0,05$$

$$P(\bar{A}) = 0,82$$

$$P(\bar{B}) = 0,88$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,95$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A} \text{ barre} \cap \bar{B} \text{ barre}) = 0,95$$

Réponse B :

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cup B \text{ barre}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,82 + 0,88 - 0,95 = 0,75$$

On a 75% de chances que les deux systèmes fonctionnent.

Exercice 2 :

Le jeu de passe dix consiste à jeter trois dés. On gagne si la somme des points est supérieure à 10. Le chevalier de Méré a constaté que l'on gagnait plus souvent avec 11 que 12 points. Cela ne lui semble pas logique, car il y a six possibilités de faire 11 points et six possibilités de faire 12 points.

Le chevalier de Méré écrit donc à Pascal pour lui faire part de ce problème. Qu'auriez-vous répondu à la place de Pascal ?

$$11 = \{6;4;1\} \{6;3;2\} \{5;5;1\} \{5;4;2\} \{5;3;3\} \{4;4;3\}$$

$$12 = \{6;5;1\} \{6;4;2\} \{6;3;3\} \{5;5;2\} \{5;4;3\} \{4;4;4\}$$

A chaque fois, nous avons 6 possibilités de faire les combinaisons à 3 chiffres, nous avons 3 possibilités de faire les combinaisons à 2 chiffres, et nous avons une possibilité de faire les combinaisons à 1 chiffre.

$$\text{Possibilités avec 3 dés} = \text{Card}(\Omega) = 6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216 \text{ poss}$$

$$P(11) = 27/216 = 0,125$$

$$P(12) = 25/216 = 0,116$$

Réponse : Tu te trompes, Méré, car tu ne distingues pas les dés, il y a plus de chances de faire $\{5;4;3\}$ que $\{4;4;4\}$. Les différents événements tels qu'ils sont présentés ne sont pas équiprobables. Il y en fait 27 manières de faire 11, contre 25 manières seulement de faire 12.

Exercice 3 :

Une boîte contient 7 jetons numérotés de 1 à 7. On en tire une poignée de 3.

Quelle est la probabilité que la somme des numéros tirés soit supérieure à la somme des numéros restants ?

$\text{Card}(\Omega) =$ manière de choisir 3 numéros parmi 7 sans tenir compte de l'ordre.

$$= C^3_7 = 7! / 3! 4! = 35$$

$$\text{Somme totale des 7 jetons} : 1+2+3+4+\dots+7 = 28$$

Cherchons quelles sont les sommes qui sont supérieures à 15 points ?

$$7+6+5 = 18$$

$$7+6+4 = 17$$

$$7+6+3 = 17$$

$$7+6+2 = 15$$

$$7+5+4 = 16$$

$$7+5+3 = 15$$

$$6+5+4 = 15$$

$$P = 7/35 = 0,2$$

Exercice 4 :

Démontrer que dans un TD de 23 étudiants, il y a plus d'une chance sur deux pour que deux étudiants au moins aient leur anniversaire le même jour. Généraliser ensuite à n étudiants. Pour simplifier on ne prendra que des années de 365 jours.

A « 2 étudiants au moins ont leur anniversaire le même jour »

$$\text{Card}(\Omega) = 365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365 = 365^{23}$$

$\bar{A}$ « tous les étudiants ont leur anniversaire un jour différent »

$$\text{Card}(\bar{A}) = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343 = A^{23}_{365}$$

$$P(\bar{A}) = A^{23}_{365} / 365^{23}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (A^{23}_{365} / 365^{23}) = 0,507$$

Pour n étudiants :

$$\text{Si } n > 365 \Rightarrow P(A) = 1$$

$$\text{Si } n \text{ inférieur ou égal } \Rightarrow P(A) = 1 - (A^n_{365} / 365^n)$$

Exercice 5 :

Un portefeuille contient v vrais billets et f faux billets. On vide ce portefeuille en tirant au hasard chaque billet un par un et en notant V si c'est un vrai et F si c'est un faux. L'expérience aboutit donc à une liste du type VVFVVF...

- 1) Quelle est la proba de sortir un faux billet dès le premier tirage ?
- 2) Quelle est la proba de ne sortir un faux billet qu'au bout de n tirages ?
- 3) Quelle est la proba de sortir un deuxième faux billet au bout de n tirages ?
- 4) Généraliser au cas k^{ème} faux billet.

$$1) P(A) = \frac{f}{f+v}$$

$$2) P(B) = \frac{\binom{f+v-n}{f-1}}{\binom{f+v}{f}}$$

$$3) \binom{n-1}{1} \times \binom{f+v-n}{f-2} = P(C) = \frac{\binom{n-1}{1} \times \binom{f+v-n}{f-2}}{\binom{f+v}{f}}$$

$$4) \binom{n-1}{k-1} \times \binom{f+v-n}{f-k} = P(D) = \frac{\binom{n-1}{k-1} \times \binom{f+v-n}{f-k}}{\binom{f+v}{f}}$$