



PROBABILITES
Fascicule d'exercices

Responsable : **Mr LOMBARDOT Eric**
Maître de conférences

Niveau : L1
UFR : 06 Gestion
Année universitaire : 2014/15
1^{er} semestre

Planning des séances de TD

Séance 1 : Dénombrement

Séance 2 : Probabilités simples

Séance 3 : Probabilités conditionnelles

Séance 4 : Variables aléatoires et loi binomiale

Difficulté des exercices :

- * Très simple
- ** Simple
- *** Moyenne
- **** Avancée

Séance 1 : Dénombrement
Semaine 1

Exercice 1.1. *Choix d'option(s)*

*

Les étudiants de 1^{ère} année ont le choix entre deux options obligatoires. 840 étudiants sont inscrits à la première option et 620 sont inscrits à la seconde. Par ailleurs, 60 étudiants plus courageux se sont inscrits aux deux options. Combien d'étudiants la promotion comporte-t-elle ?

Exercice 1.2. *Avoir du cœur*

*

On tire 3 cartes d'un jeu de 32. Combien de mains (combinaisons de 3 cartes) contiennent au moins un cœur ?

Exercice 1.3. *A table !*

**

n invités s'assoient autour d'une table ronde. Combien y a-t-il de dispositions possibles, sachant que seules comptent les positions relatives des invités les uns par rapport aux autres ? (2 dispositions sont identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite)

Exercice 1.4. *Range ta chambre !*

**

12 magazines distincts sont placés côté à côté sur une étagère. Quel est le nombre de dispositions qui placent côté à côté 3 magazines fixés de cette collection ?

Exercice 1.5. *Politiquement incorrect*

**

Une association qui comprend 30 membres, dont 20 hommes et 10 femmes, va procéder à l'élection de son comité de direction. Il faudra élire un président, un secrétaire et un trésorier. Les postes ne sont pas cumulables.

1) Combien de comités différents sont possibles ?

2) Combien de comités différents sont envisageables si :

- a) le poste de secrétaire est réservé à une femme (hypothèse : on élit la secrétaire en premier) ?
- b) les postes de président et de trésorier sont réservés à des hommes ?
- c) le président et le secrétaire doivent être de sexe différent ?
- d) le poste de président est réservé à un homme, le poste de secrétaire à une femme et Monsieur Gloubi refuse de siéger au comité avec Madame Boulga ?

Exercice 1.6. *Histoire de cubes*

On peint en bleu un cube de 5 cm d'arête puis on le découpe en petits cubes de 1 cm d'arête.

1) Combien des petits cubes ont : 3 faces colorées, 2 faces colorées, 1 face colorée, 0 face colorée ?

2) On dispose ensuite les petits cubes obtenus dans une boîte et on en tire 4 au hasard :

- a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- b) Combien de ces tirages amènent 2 cubes exactement avec 3 faces bleues ?
- c) Combien de ces tirages amènent uniquement des cubes ayant au plus 1 face bleue ?
- d) Combien de ces tirages amènent 4 cubes ayant, à eux tous, 6 faces bleues ?

Séance 2 : Probabilités simples
Semaine 2

Exercice 2.1. *0 faute*

*

Un article à paraître dans un journal contient 5 coquilles. A chaque relecture par un collègue la probabilité de détection d'une erreur ayant subsisté est de $3/4$. Quelle est la probabilité p_n qu'il ne subsiste aucune faute après n relectures ? (n étant un entier naturel positif)

Exercice 2.2. *Admissions parallèles*

*

Une grande école qui recrute en 1^{ère} année des étudiants de prépa recrute également par admission parallèle en 2^{ème} année. Cette année, parmi les étudiants de 2^{ème} année, 27% avaient une licence scientifique, 16% une licence d'économie ou de gestion, 13% une licence de droit, 9% avaient à la fois une licence scientifique et une licence en économie ou gestion, 6% à la fois une licence d'économie ou gestion et une licence de droit, 3% à la fois une licence scientifique et une licence de droit. Aucun n'avait plus de 2 licences. Si vous sélectionnez au hasard un étudiant de 2^{ème} année de cette école, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un étudiant entré par voie parallèle ?

Exercice 2.3. *La jolie baballe !*

**

Une boîte contient 15 balles vertes, 10 balles jaunes, et 5 balles rouges.

1) On tire successivement avec remise 3 balles :

- a) Quelle est la probabilité que le tirage soit tricolore ?
- b) Quelle est la probabilité que le tirage soit unicolore ?
- c) Quelle est la probabilité que le tirage soit bicolore ?

2) On tire successivement sans remise 3 balles, répondez à nouveau aux trois questions a, b, c.

3) On tire simultanément 3 balles, répondez à nouveau aux trois questions a, b, c.

Exercice 2.4. *C'est du second degré...*

On jette un dé 3 fois de suite. Les numéros obtenus sont notés dans l'ordre : a , b et c . Quelle est la probabilité que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ait 2 racines réelles distinctes ?

Séance 3 : Probabilités conditionnelles
Semaine 3

Exercice 3.1. *La musique adoucit les mœurs*

**

Trois usines A, B et C produisent respectivement 45%, 35% et 20% des lecteurs MP3 vendus sous la marque « Good-vibes ». Au niveau de la production de chacune de ces usines, des tests ont montré que respectivement 4%, 3% et 1% des lecteurs MP3 fabriqués sont défectueux. Vous achetez un lecteur « Good-vibes » qui ne fonctionne pas. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'usine A ?

Exercice 3.2. *Question existentielle*

Cette année, votre premier semestre débute par les probabilités et se termine par les statistiques. En moyenne, 3 étudiants sur 10 sont doués pour les probabilités, 7 étudiants sur 20 sont doués pour les statistiques, et 1 étudiant sur 5 est doué pour les deux disciplines. Si vous avez été nul en probabilités, quelles sont vos chances d'être doué pour les statistiques ?

Exercice 3.3. *Le jeu du faussaire*

Une boîte rouge contient 4 vrais billets de banque et 6 faux. Une boîte jaune contient 10 vrais billets et 8 faux. Un jeu consiste à tirer au hasard, successivement et avec remise, 4 billets, et bien entendu à obtenir le plus possible de vrais billets. Mais au préalable, il faut lancer deux dés : si le total des points est inférieur ou égal à 7, vous jouez avec la boîte rouge et si le résultat est strictement supérieur à 7, vous jouez avec la boîte jaune.

- 1) Quelles sont vos chances d'obtenir 2 vrais et 2 faux billets ?
- 2) Quelles sont vos chances de n'obtenir que des faux billets ?
- 3) Pas de chance, vous n'avez obtenu que des faux billets... Quelle est la probabilité que vous ayez joué avec la boîte jaune ?

Séance 4 : Variables aléatoires et loi binomiale
Semaine 4

Exercice 4.1. *Des dés*

*

On vous propose une partie d'un jeu très simple. Vous devez payer α euros pour jouer, ensuite, vous lancez 2 dés, et vous gagnez 10 euros fois la somme des 2 dés. A partir de quelle valeur de α accepteriez-vous de jouer (après vous être assuré que les dés n'étaient pas truqués bien sûr) ?

Exercice 4.2. *Désolé, y'en a plus...*

*

Vous êtes le responsable du rayon « écrans plats » d'un grand magasin hi-fi vidéo. Grâce à votre formation poussée en statistiques et probabilités de la Sorbonne, vous êtes réputé pour votre gestion optimale des stocks, ce qui vous permet de toucher chaque mois une prime non négligeable. Vous vous intéressez aujourd'hui à la mise en rayon du téléviseur « TRX-900 » d'une grande marque. Des estimations fiables de la demande aléatoire journalière X du produit « TRX-900 » sont à votre disposition :

Demande	0	1	2	3	4	5
Probabilités	0,10	0,15	0,25	0,30	0,15	0,05

- 1) Calculez l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la demande journalière X .
- 2) Si vous avez en stock 2 téléviseurs « TRX-900 » en début de journée, quels sont les risques de rupture de stock ?
- 3) Pour être sûr à plus de 90% de pouvoir servir tous les clients, combien devez-vous avoir au minimum de téléviseurs « TRX-900 » en stock en début de journée ?

Exercice 4.3. *Super Loto*

Régulièrement, la *Française des Jeux* propose un « Super Loto » (une super cagnotte) qui permet, pour 1,50 euros, de remplir une grille (on coche 7 numéros parmi 49) et espérer gagner des millions. Les montants proposés dépendent du nombre de participants et du nombre de vainqueurs. Intéressons-nous à un exemple de tirage qui a réellement eut lieu. Pour mémoire, les numéros gagnants étaient : 35, 2, 32, 40, 17, 27 et le complémentaire le 10.

Les gains associés étaient :

Nombre de bons numéros	Gain par grille (en euros)
6	1 428 572,00
5 et le complémentaire	10 804,20
5	729,40
4 et le complémentaire	73,60
4	36,80
3 et le complémentaire	8,00
3	4,00

- 1) Calculez la probabilité d'obtenir chacun de ces gains, ainsi que la probabilité de perdre.
- 2) Soit X la variable aléatoire associée au gain net. Déterminez la loi de X , puis calculez son espérance et sa variance. Commentez.
- 3) Commentez le slogan publicitaire : « 100% des gagnants ont tenté leur chance ».
- 4) Ce jour là, à combien aurait dû être vendue la grille de loto pour que le jeu soit équitable ? (ce n'est évidemment pas le but pour la *Française des Jeux*)

Exercice 5.1. *Vive les couches !*

*

On estime aujourd'hui que la probabilité pour une femme qui attend un enfant d'avoir un garçon est d'environ 51% et que la probabilité d'avoir une fille est d'environ 49%. Vous et votre moitié avez décidé d'avoir 5 enfants.

- 1) Quelles sont vos chances de n'avoir que des garçons ?
- 2) Quelles sont vos chances d'avoir 2 filles exactement ?
- 3) Quelles sont vos chances d'avoir au moins 2 filles ?

Exercice 5.2. *Motivés !*

*

Le responsable d'un centre de télémarketing a réalisé une segmentation très précise de ses prospects. Grâce à son travail en amont, ses télévendeurs augmentent leurs chances de remporter des contrats. En particulier, lorsqu'un vendeur contacte un prospect de la catégorie « rouge », il a en moyenne 80% de chances de réaliser une vente. Un des vendeurs décide d'appeler successivement trois prospects de la catégorie « rouge ».

- 1) Quelle est la probabilité qu'il réalise au moins 2 ventes ?

En étudiant de manière plus approfondie le comportement des télévendeurs, le responsable se rend compte à quel point la motivation influence les résultats. Il existe pour lui une « spirale de réussite », car un succès appelle un autre succès. Concrètement, il remarque que ses télévendeurs ont bien 80% de chance de conclure une vente lors de leur premier appel, mais que cette probabilité change lors de l'appel suivant et dépend de ce qui s'est passé auparavant. La probabilité de conclure une vente est de 90% si l'appel précédent est suivi d'une vente, et de 60% dans le cas contraire. Compte tenu de ces nouvelles informations :

- 2) Présentez sous la forme d'un arbre la nouvelle distribution des probabilités.
- 3) Quelle est la nouvelle probabilité qu'il réalise au moins 2 ventes ?

Exercice 5.1. *Pile je gagne, face tu perds*

Une pièce amène pile avec une probabilité p et face avec une probabilité $q = 1 - p$ avec $0 < p < 1$. On lance $6n$ fois de suite la pièce (avec $n \geq 1$). Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre des lancers amenant pile.

- 1) Déterminez la loi de X_n ainsi que son espérance $E(X_n)$ et sa variance $V(X_n)$.
- 2) Donnez un équivalent de : $U_n = P(X_n = n)$ quand n tend vers $+\infty$ en utilisant la formule de Stirling.